连续统物理的基本原理

现代连续统物理丛书 7

〔美〕A.C.爱林根 主编
朱 照 宣 译





书号：13196·201

定价：　1.24 元

现代连续统物理丛书

第七分册

连续统物理的基本原理

〔美〕A. C. 爱林根 著

朱 照 宣 译

江苏科学技术出版社

CONTINUUM PHYSICS

*

A. C. Eringen

Basic Principles of Continuum Physics

Academic Press, 1975

现代连续统物理丛书

第七分册

连续统物理的基本原理

〔美〕A. C. 爱林根　著

朱　照　宣　　译

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新 华 书 店

印刷：江 苏 新 华 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 5.8　字数 119,000

1985 年 9 月第 1 版　1985 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2,920 册

书号：13196·201　　定价：1.24 元

责任编辑　王永发

《现代连续统物理丛书》译序

中国力学学会理性力学与力学中数学方法专业组，于一九七九年八月一日至十九日在兰州大学举办了第一次理性力学讲学讨论会。会上，来自全国二十七所高等院校和中国科学院力学研究所、计算中心的全体代表共同商定组织翻译由美国普林斯登大学A. C. Eringen教授主编的《连续统物理》(卷1—卷4)一书，共分十七分册，争取于一九八〇、八一年内陆续出版，以利于推进我国理性力学的发展。今得江苏科学技术出版社的大力支持，本《丛书》终于和读者见面了. 原主编A. C. Eringen 教授亲自撰就中文版序言，并为本《丛书》在我国翻译出版给予了热情的支持.

理性力学是在近代生产的大量经验事实的基础上，建立起较完备的公理体系，运用物质运动所必须遵循的基本定律，以严密的逻辑思维和推理方法去研究连续介质(简称连续统)的物质运动和变形的一般性规律的力学。它只有二十多年的历史。当然，关于用理性的方法对连续介质运动普遍规律的研究，最早应溯及贝努里、欧拉、柯西等著名的数学家和力学家；理性力学的学科名词也始见于该时. 但从十九世纪末至二十世纪中，力学界主要着眼于传统力学在生产实际中的应用，而一度忽视了对连续介质力学的基础理论的探讨。人类工业生产的发展，引用了许多新材料，对原有材料的使用也大大地扩大了范围，只依靠象弹性材料这样简单材料的力学——弹性力学或一般流体力学，显然不能满足人们的生产要求了。这种情况从一九四五年起开始发生了变化，M. Reiner和R. S. Rivlin 等人对橡皮物质大变形的研究，接着一九四八年J. D. Oldroyd对流变物质状态方程的研究，逐步为形成近代理性力学创造了条件。C. A. Truesdell, W. Noll和B. D. Doleman等人从一九五八年后提出了更加完善的关于构造物质运动本构方程的

公理体系，建立了各类物质本构方程的严密的数学模型，使理性力学形成了一个比较完美的理论体系，澄清了应用力学中关于应力、应变、应力率、应变率等含糊不清的基本概念。在此基础上，对物质进行了分类，确立了简单物质的谱系，并对谱系中各种物质（弹性物质、粘弹性物质、超弹性物质、次弹性物质）的本构方程进行了广泛深入的研究，用逆法或半逆法找到了在有限变形条件下不少问题的精确解。这就把二十世纪初期蓬勃发展起来的应用力学的研究范围大大地推进了一步，即把通常线性物性方程如Hooke弹性体，Maxwell，Voigt和Boltzmann线性粘弹性体，Newton粘性流体的研究范畴，推进到非线性物性方程的研究范畴，而且考虑了机械变形和热、电、磁各种非线性耦合效应。与此同时，提出了各种新型物质如液晶、微极物质、微态物质、非局部物质、位错连续统的数学模型，并进行了大力的研究。在此基础上，逐步形成了前途十分广阔的新学科、新方向。这一切使我们对客观世界的认识更加深了。理性力学也研究连续统在热、电、磁等和力学的耦合现象，因此，被称为连续统物理。

理性力学与近代数学有着密切的联系，在其发展过程中，用到了近代数学中包括张量分析、微分几何、不变量理论、群论、泛函分析、拓扑学、解析函数论等许多基础知识。目前，尤其在欧洲业已形成了用纯粹数学来研究力学理论的新学派。因此，理性力学在其发展过程中，虽曾经历了一段曲折的道路，但经过二、三十年的奋斗，作为连续介质力学的理论基础，业已牢牢地树立了自己的地位。在国际上，它强烈地影响着传统的力学教育和力学研究，也大大地增强了力学处理现实生产问题和近代新型工业材料的能力。

A. C. Eringen主编的《连续统物理》就包括了这一学科的几乎全部的现代成就，所以本《丛书》译名定为《现代连续统物理》。本《丛书》的译审小组成员：钱伟长（组长）、叶开沅、朱兆祥、朱照宣、汪家诔、苗天德、周焕文、张文、段祝平、戴天民。

钱伟长

一九七九年十二月八日于清华园

中译本序

当前，在所有物理学理论的构造中，共有两种基本的数学模型：一是离散体模型，另一是连续统模型。离散体模型认为，物体是由大量具有确定物理性质(如质量、电荷)，彼此又相互吸引而聚集在一起的几何点的集合所组成的。这方面最突出的例子莫过于原子模型了。虽然，对许多物质理论，牛顿力学仍然适用，但原子模型的基本定律则由量子力学所描述的。

连续统模型则引用场的概念去描述物体的几何点，不必去区分构成该物体的一个个粒子间的差异。在物体任一点上可以确定一个密度，例如质量密度、电荷密度和能量密度，不再把它们加以量子化。此外，表面上的点具有面密度，如应力和热流。在连续统模型中运用的物理定律是各种守恒律，此外还由本构方程予以补充。

一个数学模型，不论它是多么的严谨，也决不能真真实实地一丝不差地表达出物质的物理学规律的。外部特征长度(和/或时间)与物体内部特征长度(和/或时间)的比值决定了该物体对外界作用的反应。当外界作用的载荷给出的波长大大超过颗粒(原子)间的距离时，经典场论得到的结果和实验观测相符合。当该比值趋近1时，离散体模型便将取而代之了。但当特征长度的比值小于1时，点粒子(原子)可再度认为具有连续统的特性。这时，可把物体考虑成是由离散的连续体的集合组成的。在这里，我们明确地看到了离散体和连续体这两种模型交织在一起的混合模型。

量子力学是在一种尺度上建立起来的，而相对性场论用的是另一种尺度，这就足以使我们相信，一切离散体的模型和连续统的模型都具有它们理论自身适用的范畴，这种适用性取决于我们所要求的精度。

人们常说，原子模型描述了"真实的世界"。其实，这种说法仍然只

是一种个人的喜爱或抱有成见的观点，因为几何点没有尺度就不可能具有诸如质量、电荷这样的物理属性的。相反地，对连续统模型又怎样呢？这里，几何点是用场来描述的。按此逻辑，连续统模型要比离散体模型“更加真实”。其实，这个结论也会给人以一种错觉，因为不可能有纯粹是几何点构造的物体的。

一种理论当它能说明许许多多的物理现象而同时结构简单又具有完美的感染力时才是最有生命力的。

过去的二十年，连续统场论在两个基本方面取得了重大的进展：(一)建立了经典的线性和非线性场论的数学模型，(二)把微极场论和非局部场论引导到具有内部结构的物质研究中去。在第一方面，我们有：非线性弹性理论，流体动力学，与记忆有关的弹性体、与记忆有关的流体、混合物理论以及电磁场理论。我们已毫不含糊地确立了普遍适用于这些场的基本定律，同时本构方程也有了更加坚实牢靠的基础。

研究这些基础理论产生了丰硕的成果，人们不但揭示了在这些乍看上去互不相同的物理场之间存在着基本的结构和统一的原理，而且能够更加深入和广泛地把我们的研究范畴扩大到包括复合介质(固体和流体的混和物、多孔介质)和有电磁场作用的变形介质中去。本专著第二卷和第三卷分别讨论了由单一物质和混合物组成的基本原理和本构理论。

经典场论不包含有内在的特征长度，所以它只限于在宏观物理学的范畴内应用。随着微极场论和非局部场论的发展，我们进入了具有内部结构的物质领域。属于微极理论和非局部理论应用范畴的例子有：颗粒固体、非结晶材料、复合材料、多孔材料、各向异性流体、悬浮体、血液、液晶和磁性材料等等。诚然，数学上已有了相当多的解可以作为我们的证明，但人们还在期待着有更多的解的到来。非局部场论实际上具有一种潜在的力量，它可以解释和预言在分子和原子尺度范围内发生的物理现象。对这一点，看一看近来在波的传播、位错理论、断裂力学(例如，裂纹尖端问题)等领域内获得的结果便会深信无疑了。本专著第四卷对微极理论和非局部理论进行了讨论，第三卷讨论微磁场理论。可惜的是，在本专著出版的时候，尚无这一方面的更多解法和其他的结果，

因而只能暂付阙如.

毫无疑问,一切理论随着时间的流逝,都会对其作出修改,同时会给出更加满意的证明。尽管如此,所有的物理学理论,倘若得以生存,还必须经受住来自实验的严峻考验. 有些时候,实验期待着上升到理论的高度(例对液晶), 有时,为提出一个决定性的实验却需要得到一些更新的数学解法.

在连续统场论发展的过程中, 数学的许多分枝起到了重要的作用. 本专著第一卷包含的数学内容就是根据编者在撰稿时的喜爱选择的.由于篇幅有限,无奈有不少重要的其他的数学分枝都不在本卷选编之列.

这四卷专著译成中文,本人感到极为荣幸. 现代连续统场论能和这样广大的中国读者见面,这在开拓其他理论领域和发展科学及技术的应用方面必将产生重大效果. 我们希望,中译本的出版也将为加强中美之间的友谊作出贡献.

A. C. 爱林根

一九八〇年五月

主编者原序

在过去十年里，连续统场论的基础和有关应用都得到了一些明确而又重大的进步，变形介质的几何学和运动学都已严格地建立起来了。单一介质，材料的混合物和具有微结构的材料的平衡定律已经形成了。具有单一材料的连续介质的热力学取得了牢固的基础，而且，在建立混合物和具有化学反应的介质的热力学方面，也取得了重大的进步。我们已经有了一个包罗万象的而且严格的本构方程理论，它已成功地应用于许多特殊类型的材料，例如，非线性弹性体、非牛顿流体、记忆性材料、混合物以及电磁固体和流体等。除此而外，还认真地用不同的几何学在各种不同类型的介质中寻找过非线性静力学和非线性波动学问题的各种解。

面对着这类研究工作的爆炸性的快速发展，即使专家也很难跟上去、理解它，并把它用在各自的研究工作中去。由于这个领域的文献既广泛又分散，搜寻、阅读和理解这些文献的确存在着困难。许多在古典领域中进行研究工作的人员，都遇到了上述实际困难；不少新形成的学派，还是孤立地工作着的。

三卷本①的《连续统物理》就是为各个互不联系的专家和学者提供必要的基础来阅读连续统物理各个方面的最新文献。这样，我们希望不同领域的研究工作者能够携起手来，共同工作，而且从其它领域发展的一些强有力的方法中，各自有所借镜。

我们一定要在非线性理论和发展得很完善的古典线性理论以及近似理论之间，建立种种桥梁。通过谨慎地选择问题和选择解法，非线性

① 译注 后来又出了第四卷，主要介绍了在广义连续统理论的研究基础上建立起来的微极场论、非局部场论和非局部极性场论。

场论和线性场论在某些应用中将能带来有意义的启发。

这个规划是宏伟的。在建立过程中，常常诱使人们追求详尽。力求完备的心情是不小的。如果我们不注意克服这种意图，常常会使我们偏离基本目标，不仅不能保持头脑清醒，反而引起更多的混乱和失望。所以，我们不得不在许多重要的领域内采取简述，在另一些领域内，力求严加选材。

在第一卷内，我们致力于讨论一些选用的数学方法。每个方法都只能有精简的分量。在连续统物理研究工作中，几乎要用到所有数学领域，那怕只用一点点，但都有一席地。我们只选取了数学的六个领域，在连续统物理的发展中，它们都曾占有了中心地位，并曾反复使用过的。它们是张量分析，群论、不变量理论、泛函分析、解析函数论、随机过程。它们都纳入第一卷的第一至第四部分。不幸的是，还有许多数学领域同样地是基础，但只好割爱了。它们包括偏微分方程、积分方程、可微的和拓扑的流形等诸重要领域。

本书的第二卷，致力于单一材料连续统的非线性理论，讲述了变形的几何学和运动学，讨论了平衡定律、热力学和本构理论。第二卷第一部分是基础理论，它专门处理热弹性固体，热粘性流体，塑性力学以及与记忆有关的材料。第二卷第二第三部分涉及固体介质和流体介质的非线性静动力学诸问题的解法。为了阐明使用积分方程和解析函数论的基本数学方法，这里也处理了线性理论和一些重要的线性混合边界值问题。近似法和数值法同样是重要的，但并未包括在本卷之内。

本书的第三卷致力于混合物、位错和电磁相互作用的连续统理论。

我必须声明：本书得到了许多作者愉快的合作，没有他们的贡献，本书的目的就无法实现。为此，我向他们致谢。我和我的同事之间的友好的讨论、耐心的修订和热忱的工作，经常给我不断的鼓励。

许多文章不仅是已知材料的重新组织，而且包括着作者们的新发现。我们诚恳希望，这些工作不仅对研究人员有帮助，而且也可以供工程和应用科学、应用数学和数学物理的研究生教学学习之用。

目　录

第一章　变形和运动

1.1 本章的范围

本章涉及连续统的变形和运动学．开始九节给出物质体的变形分析，并导出当物体位移逐点给出时变形物体和未变形物体各子流形之间的关系．本章其余各节讨论连续统的运动学和它们的量度．

在 1.2 节引进坐标系、基矢量和度量张量．于是物体的任何物质点 $\boldsymbol{X}$ 在时刻 t 的运动可由一个从 $\boldsymbol{X}$ 到空间点 $\boldsymbol{x}$ 的单参数可逆映射来描述．当这个映射在(至少)一个时刻给出时，我们就有一个变形场，它将未变形体各点在该时刻映射到空间一个区域，即变形体所占据的区域．用以表征形状和大小变化的各种量度在 1.3 节介绍．它们的几何意义则在1.4节讨论．1.5 节讨论一点无限小邻域的局部变形，这方面由柯西物质椭球面和空间椭球面显示出来．它们也自然地引向确定应变不变量和主方向，即其中应变矩阵成为对角型矩阵的各方向．接着在 1.6 节通过物质椭球面主轴和空间椭球面主轴之间的变换，自然导出有限局部转动的概念．以上各节为 1.7 节证明转动的基本定理作了准备．1.8 节确定了面积变化和体积变化．“已知应变场是否对应于一个单值的位移场?”这一问题提出了应变场的不协调性问题，它在 1.9 节讨论．

物体各有关张量的时间变率对于物体变形随时间的演变

过程以及连续统的动力学都很重要，这些在1.10节介绍，并在1.11节用以计算变形率、自旋和涡旋度，在1.12节用以计算应变和转动，在本章最后两节(1.13和1.14)里，我们计算在物质流形上和在空间流形上积分的变率，并证明一些定理．当流形包含活动间断面或间断线时，这些定理对计算体积或表面积的时间变率、张量场的线积分很重要．这些对于推演平衡定律和跳跃条件是必要的．

本章旨在为讨论简单物质局部连续统理论提供基础，它们对于第三卷中讨论的混合物的理论和非局部连续统理论[①]也是根本的．

1.2 坐　　标

为了对物质体内发生的任何物理现象建立数学程式，需要先建立起物理实体各要素和数学理论根据中各基本记号之间的对应关系．这等效于用一个理想的"数学物体"代替真实的物体．接着可用数学公理和数学运算研究各种问题，再用建立起的对应关系翻译成为真实的物理现象．这样所得的预见，可和观察结果比较以检验理论的限制条件．当然，观察本身就构成真实物理现象的一种理想化．然而它们正是技术发展的根据．一方面实验验证和理论预见的精度越来越高，另一方面人们希望把更广泛范围的物理现象纳入理论；两者相互作用，结果是需要更好的精确数学模型．

在经典物理学范围内，物体当作由有质量有电荷的"粒子"组成，于是一切物理现象可认为是这些粒子在各种外界

① 译注　分别见本丛书第十三分册和第十六分册．

条件下运动的结果．在最广泛的意义下，对物体可作这样的数学理想化：由物体的各“物质点”① $\{P\}$ 作为元素组成一个集合，称为物质体 B．这里的元素从某种物理考虑来说当作事先已知的，而在对所研究的物理现象作出理论结构时总要求这种根本的物理考虑．集合 B 当作是全域集（*universalset*）U 的一个子集．这是讨论 B 时所需的参照架或者全域（*nniverse*）。B 的余集是不在 B 中元素的集合，用 B' 表示（图1.2.1）．可以把 B' 看成是围绕物体的空间，其中可能还包含别的物体．B 和 B' 都可以含有子集．另外，还将对这些集合的元素引进某些凝聚部（即几何结构），使这些集合能组成为一个空间．从数学运算说，还需要建立运算规则．它相应于物理定律．用这样的程序后，可以建立起相应于物理体的理想数学体．总起来，我们有：

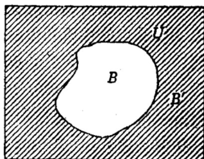


图1.2.1 物体 B 及其余集 B'

(i) (a) 物理体 $\longleftrightarrow$ 集合 B

(b) 物质点 $\longleftrightarrow$ 集 B 的元素 $\{P\}$

(c) 参照架 $\longleftrightarrow$ 全域集 U

(d) 物体的结构 $\longleftrightarrow$ B 的拓扑结构

(ii) 物理定律 $\longleftrightarrow$ $\{P\}$ 之间以及 B 和 U 或 B' 之间的运算规则

---

① 原注　这个名词比牛顿概念下的“粒子”好，因为它还可进一步推广，可把粒子作为若干物质点组成的集体，这种概念对于极性原子和分子理论有用．

一个物理理论所关心的，是物体拓扑结构的演变以及物体和外部世界B'之间的相互关系．各种物理现象性质不相同，是由于集合B的结构和对B的元素所作运算的性质不相同而引起的．

在第二卷① 我们考虑单种材料所组成连续统的力学，材料的质量只是经典场论意义下的，因为这种较紧的限制可以加之于物质点的性质和B的结构上．其实，下面将引进一种几何，一种度量空间，并提出若干平衡定律(见第2章)作为公设．最后，计入B和U（或B'）时采用的是等价的物理和几何效果(例如，体载荷和面载荷、约束等)．

按照上述程序，我们将物体在时刻$t=0$的每一个物质点P与所有三元数组(X^1,X^2,X^3)的集合E^3之间建立起一一对应：

$$(1.2.1)\quad P=P(X^1,X^2,X^3),\quad X^K=X^K(P),\quad K=1,2,3$$

其中X^1,X^2,X^3或即$X^K(K=1,2,3)$是实数．以后除非有需要，不再分辨P和X^K（或$\boldsymbol{X}$）．对集合E^3可以赋予各种数学结构。例如，它可以是某一类度量空间．其实，我们把E^3当作是三维欧氏空间中的一个坐标流形．有时把曲线坐标写成$Z^K(Z^1,Z^2,Z^3)$以区别于直角坐标的显式写法(X,Y,Z)，这种描述和经典连续统力学中的相同．我们还约定物体在时刻$t=0$的这个状态取作为未经畸变的参照态．

从直角坐标到曲线坐标是通过下述一对一映射②沟通

① 译注　指本丛书第七到第十二分册．

② 原注　为简单起见，映射和它的值采用同样的记号．如有必要分清，则将改变函数所用主要字母．

的：

$$(1.2.2)\qquad Z^K=Z^K(X^1,X^2,X^3)\longleftrightarrow X^K=X^K(Z^1,Z^2,Z^3)$$

且在B的所有点处雅可比行列式

$$(1.2.3)\qquad J\equiv \det(\partial Z^K/\partial X^L)\neq 0$$

假设映射(1.2.2)具有连续偏导数.为使坐标系Z^K和X^K具有相同的螺旋指向，不失普遍性我们还取$J>0$（讨论见第一分册1.3节）。映射(1.2.2)等价于每一点P处有这样的网络图：三个曲面$X^1=$常量，$X^2=$常量和$X^3=$常量在P处相交，形成三条曲线(图1.2.2)。



图 1.2.2 曲线坐标

于是，物体的各物质点等同于E^3的各几何点，物体B变成为欧氏度量空间的一个子集.在这欧氏空间中，P点也可由

其位置矢量$\boldsymbol{P}$定位，$\boldsymbol{P}$由直角坐标原点0指向P点，即可写出

$$(1.2.4)\qquad \boldsymbol{P}=Z^K\boldsymbol{I}_K=Z^1\boldsymbol{I}_1+Z^2\boldsymbol{I}_2+Z^3\boldsymbol{I}_3$$

其中$\boldsymbol{I}_K$是单位基矢量．

本书约定采用对角位置的重复标号表示求和．如暂不求和则在标号下加一横道，如

$$Z^{\underline{K}}\boldsymbol{I}_{\underline{K}}\text{ 指 }(Z^1\boldsymbol{I}_1, Z^2\boldsymbol{I}_2, Z^3\boldsymbol{I}_3)\text{ 中任一个}$$

当标号不止重复两次，则仍采用和法记号以免混淆，例如$A^K_K Z^K$意义含糊，不如用$\Sigma^3_{K=1}A^K_K Z^K$清楚．

定义不共面的三个基矢量$\boldsymbol{G}_K$（它们与曲线坐标线相切）如下：

$$(1.2.5)\quad \boldsymbol{G}_K(\boldsymbol{X})\equiv\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial X^K}=\frac{\partial Z^M}{\partial X^K}\boldsymbol{I}_M=Z^M{}_{,K}\boldsymbol{I}_M$$

其中逗号后的下标代表偏微分运算．

在P点的微分矢量元$d\boldsymbol{P}$可表示为

$$(1.2.6)\qquad \begin{aligned} d\boldsymbol{P}&=(\partial\boldsymbol{P}/\partial X^K)dX^K=\boldsymbol{G}_K dX^K\\ &=Z^M{}_{,K}\boldsymbol{I}_M dX^K. \end{aligned}$$

于是弧长的平方由

$$(1.2.7)\qquad (dS)^2=d\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{P}=G_{KL}dX^K dX^L$$

计算得到，其中

$$(1.2.8)\qquad G_{KL}(\boldsymbol{X})\equiv\boldsymbol{G}_K\cdot\boldsymbol{G}_L=\delta_{MN}Z^M{}_{,K}Z^N{}_{,L}$$

是在物质参照架中的度量张量，而$\delta_{MN}=\boldsymbol{I}_M\cdot\boldsymbol{I}_N$是克氏（Kro-

necker)符号，当$M=N$它等于1，否则等于0。有了度量张量就可计算长度和夹角。例如，$\boldsymbol{G}_K$ 和 $\boldsymbol{G}_L$ 之间的夹角由

$$(1.2.9)\qquad \cos(\boldsymbol{G}_K,\boldsymbol{G}_L)=\boldsymbol{G}_K\cdot\boldsymbol{G}_L/|\boldsymbol{G}_K||\boldsymbol{G}_L| = G_{KL}/(G_{KK}G_{LL})^{\frac{1}{2}}$$

计算得出。由此可见曲线坐标 Z^K 正交，当且仅当对$K\neq L$ 有 $G_{KL}=0$。不难计算P处任何两方向之间的夹角。

度量张量的逆变分量G^{KL}满足九个方程：

$$(1.2.10)\qquad G^{KM}G_{ML}=\delta^K_L$$

其解为

$$(1.2.11)\qquad G^{KL}=G_{KL}\text{ 的余因子}/\det\ G_{KL} = (1/2G)e^{KPQ}e^{LRS}G_{PR}G_{QS}$$

其中

$$(1.2.12)\qquad G\equiv\det\ G_{KL}=(1/3!)e^{KPQ}e^{LRS}G_{KL}G_{PR}G_{QS}$$

上两式里 e^{KLM} (以及今后将用到的 e_{KLM})是交错符号

$$(1.2.13)\qquad e^{123}=e^{312}=e^{231}=-e^{213} = -e^{321}=-e^{132}=-1$$

$$\text{其余全}=0$$

逆基矢量 $\boldsymbol{G}^K$ 由

$$(1.2.14)\qquad \boldsymbol{G}^K=G^{KM}\boldsymbol{G}_M$$

计算得。由此式作标量积并利用(1.2.10)得

(1.2.15) $\boldsymbol{G}^K \cdot \boldsymbol{G}_L = \delta^K_L, G^{KL} = \boldsymbol{G}^K \cdot \boldsymbol{G}^L$

其中第一式表明逆基矢 $\boldsymbol{G}^K$ 垂直于 $\boldsymbol{G}_K$.

利用度量张量可对与参照架有关的矢量和张量进行升标或降标. 例如P处的一个矢量 $\boldsymbol{V}$ 可以用它的**逆变分量**V^K和**协变分量**V_K表示为

(1.2.16) $\boldsymbol{V} = V^K \boldsymbol{G}_K = V_K \boldsymbol{G}^K$

将上式分别与 $\boldsymbol{G}^L$ 和 $\boldsymbol{G}_L$ 作标量积, 得

(1.2.17)
$$V^K = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{G}^K = G^{KL} V_L$$
$$V_K = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{G}_K = G_{KL} V^L$$

所有这些在张量代数中都已讲过(见第一分册 2.2 节).

物体可能具有别种位形 (*configuration*). 物体B的一个**位形** χ 是B 到 E^3 一 区 域 上 的一个光滑**同胚** (*homeomorphism*):

(1.2.18) $\boldsymbol{x} = \chi(P), \quad P = \overset{-1}{\chi}(\boldsymbol{x})$

其中 χ 是P 到 $\boldsymbol{x}$ (x^k)上的映射, 而 $\overset{-1}{\chi}$ 是其逆映射. 点x^k称为物质点P所占据的**地方**. 利用(1.2.1), 则由坐标表示时,

(1.2.19) $x^k = \chi^k(X^K), \quad X^K = \overset{-1}{\chi}{}^K(x^k)$

坐标 $x^k(k=1,2,3)$称为物质点P在位形χ中的**空间坐标**. 假设 χ 和$\overset{-1}{\chi}$的函数是可微的. 为节省记号, 也常把χ改写为x, $\overset{-1}{\chi}$改写为 X, 于是(1.2.19)成为

$$(1.2.20)\qquad x^k = x^k(X^K),\quad X^K = X^K(x^k)$$

因而相对新的一组坐标 x^k，与诸点 $p(x^k)$ 有关的场可能有不同于相对 $P(X^K)$ 时所取的值．例如，可以用 X^K 对 P 在未变形物体中定位而用 x^k 对一点 p 在变形物体中定位．我们也不再分辨 p 和 x^k（或 $\mathbf{x}$），除非有必要保持这种分辨．

设空间坐标 x^k 中的基矢量系及其逆分别用 $\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}^k(\mathbf{x})$ 代表，则对于 $(\boldsymbol{G}^K, \boldsymbol{G}_K)$ 和 $(\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{g}^k)$ 这两个基组，可以用其中一组来表达出另一组，即

$$(1.2.21)\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{G}_K &= g^k_K \boldsymbol{g}_k, \quad \boldsymbol{G}^K = g^K_k \boldsymbol{g}^k \\ \boldsymbol{g}_k &= g^K_k \boldsymbol{G}_K, \quad \boldsymbol{g}^k = g^k_K \boldsymbol{G}^K \end{aligned}$$

其中

$$(1.2.22)\qquad \begin{aligned} g^k_K(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}) &\equiv \boldsymbol{G}_K(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{x}) \\ &= g^{kl} G_{KL} g^L{}_l \end{aligned}$$

称为**搬移子**(*shifter*)．搬移子 g^k_K，g^K_k（以及 g^{Kk} 和 g_{Kk}，它们可由用 g^{kl}，g_{kl} 和 G^{KL}，G_{KL} 以升降标号 k 和 K 而得）都是**双点张量场**①．如取标量积，可见

$$(1.2.23)\qquad g^k_L g^K_k = \delta^K_L,\quad g^k_K g^K_l = \delta^k_l$$

利用这些张量，对于同一矢量在两坐标系中的各组分量，可以把其中任一组另一组用表达出来；例如，设对

$$(1.2.24)\qquad \boldsymbol{V} = V^K \boldsymbol{G}_K = v^k \boldsymbol{g}_k$$

① 译注　关于“双点张量场”的一般讨论可见郭仲衡：《非线性弹性理论》，科学出版社，1980，第一部分，第五章，§3．

和 $\boldsymbol{G}^L$ 或 $\boldsymbol{g}^l$ 作标量积，可得

$$(1.2.25) \qquad V^K = g^K_k v^k, \quad v^k = g^k_K V^K.$$

当两个坐标系都是直角坐标系时，上面的说法尤其清楚．在直角坐标系中 $g_{Kk} = \boldsymbol{I}_K \cdot \boldsymbol{i}_k$，其中 $\boldsymbol{i}_k$ 是与直角坐标系 Z^k 相关的新笛卡儿单位矢量．于是(1.2.25)$_1$成为

$$(1.2.26) \qquad V^K = \delta^K_k v^k, \quad \delta^K_k = \boldsymbol{I}^K \cdot \boldsymbol{i}_k$$

在上式中，当且仅当 Z^K 和 z^k 重合，或者 Z^1 平行于 z^1，Z^2 平行于 z^2，Z^3 平行于 z^3 时，δ^K_k 才是替代 g^K_k 的通常克氏符号．这种情况中，$\boldsymbol{V}$ 由 P 搬移到 p（图1.2.3）．

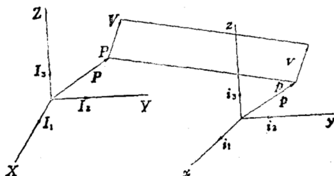


图 1.2.3 搬 移 子

1.3 运动、变形和应变的量度

连续统的运动由每一物质点位置随时间的演变所表征．在数学上，可以用一组单参数位形族来表示：

$$(1.3.1) \qquad x^k = x^k(\boldsymbol{X}, t), \quad k = 1, 2, 3$$

因而，B中物质点X^K(即$\boldsymbol{X}$)在时刻t被带到空间地位x^k(即$\boldsymbol{x}$)(图1.3.1)．我们假设映射(1.3.1)是单值的，且对所有它们的变元具有连续一阶偏导数①，除了可能有若干可数个奇异面、线或点以外．此外，(1.3.1)在空间点$\boldsymbol{x}$的一个邻域内于时刻t有唯一的逆

$$X^K = X^K(\boldsymbol{x}, t), \quad K = 1, 2, 3 \tag{1.3.2}$$

于是映射(1.3.1)和(1.3.2)在物质点P邻域内于时刻t是一对一的，除了可能有若干奇异面、线、点外．这个简单的假设称为连续性公理．它表明实体是不可毁灭的，即实体中没

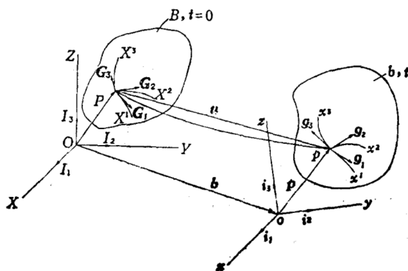


图 1.3.1 运 动

① 原注 在连续统力学中，经常要作这种连续性和可微性的要求．每次重申这种明显的条件，未免太烦琐．今后如没有专门提醒，麻烦读者注意任何表达式中所有偏导数都应理解为连续的，除非特别提出不是这样．

有哪一个正的、有限的体积会变换成零体积或者无限体积．也可以说，实体是不可穿透的，即运动只能将每一区域变成一个区域，每一个面变成一面，每一条线变成一线．实体中没有哪一部分可能穿透到另一部分内．实际上有违反这一公理的情况．比如，物质中发生断裂或者传递着激波或其他类型的不连续性。这种情况应予特别注意．连续性公理是由微积分中一个熟知的定理（参见*Widder*，1947，47页）所保证的．

定理（隐函数定理）　设对固定时刻t，函数$x^k(X^K,t)$在P点一邻域$|X'^K-X^K|<\triangle$内连续且有对X^K的连续一阶偏导数，且设雅可比行列式

(1.3.3)

$$
j\equiv\det\ (x^k{}_{,K})=\begin{vmatrix}\partial x^1/\partial X^1 & \partial x^1/\partial X^2 & \partial x^1/\partial X^3\\ \partial x^2/\partial X^1 & \partial x^2/\partial X^2 & \partial x^2/\partial X^3\\ \partial x^3/\partial X^1 & \partial x^3/\partial X^2 & \partial x^3/\partial X^3\end{vmatrix}
$$

在该处不为零，则在p的一个邻域$|x'^k-x^k|<\delta$内于时刻t存在形式为(1.3.2)的唯一的逆．

连续统力学最终目的是决定三个函数(1.3.1)或(1.3.2)的形式，已知物体在某一时刻（例如初始时刻）的几何条件以及边界条件和初始条件．求得运动后，原则上可以计算出物体中所有点的位置（因而求出物体的形状）并求得内部应力．这些资料对于工程设计和技术应用是极重要的．

在已变形的位置中，物体中各点可以用一组新坐标（直角坐标z^k，或曲线坐标x^k）定位．这虽非必不可少，但结果往往带来方便．例如，设一长方块变形成为圆柱形的管子，对

变形体用直角坐标 Z^K 而对变形体采用柱坐标 x^k 可能比较便于处理这问题．变形体的坐标 x^k 称为空间坐标或欧拉坐标，而自然状态的坐标 X^K 称为物质坐标或拉格朗日坐标．对参照于空间坐标的量，其主体将用小写拉丁字母，其分量用小写拉丁标号表示．例如，设 $\boldsymbol{v}$ 是一矢量，v^k 代表 $\boldsymbol{v}$ 在 x^k 中的逆变分量而 V^K 代表 $\boldsymbol{v}$ 在 X^K 中的逆变分量．设 $\boldsymbol{v}$ 是未变形体 B 中 P 处的一个矢量，则 V^k 代表 $\boldsymbol{v}$ 在 x^k 中的分量．设 $\boldsymbol{v}$ 是变形物体 $\mathscr{B}$① 中 p 点处的一个矢量，则 v^K 代表 $\boldsymbol{v}$ 在 X^K 中的分量．

连续统力学中，变形梯度起中心的作用，它们的定义是

$$(1.3.4)\qquad x^k{}_{,K}\equiv\partial x^k/\partial X^K,\quad X^K{}_{,k}\equiv\partial X^K/\partial x^k$$

有时采用并矢记号 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 分别代表相应于 $(1.3.4)_1$ 和 $(1.3.4)_2$ 的张量，例如，

$$(1.3.5)\qquad \boldsymbol{F}=\nabla\boldsymbol{x}\ \text{或}\ F^k_K\equiv\partial x^k/\partial X^K$$

变形梯度(1.3.4)满足九个线性方程

$$(1.3.6)\qquad x^k{}_{,K}X^K{}_{,l}=\delta^k_l,\quad x^k{}_{,L}X^K{}_{,k}=\delta^K_L$$

这两组联立九方程中任一组的解给出 (1.3.4) 中一组变形梯度以另一组变形梯度表达出来，例如，

$$(1.3.7)\qquad X^K{}_{,k}=(1/2J)\varepsilon^{KLM}\varepsilon_{klm}x^l{}_{,L}x^m{}_{,M}$$

其中

① 译注　本书作者有时用 b 表示变形物体，如图 1.3.1 和 1.9 节中．字母 b 有时又用来表示坐标原点间的矢量，表示左科西格林张量，希读者注意有关上下行文．

(1.3.8) $J \equiv (g/G)^{\frac{1}{2}} j = (g/G)^{\frac{1}{2}} \det\ (x^k{}_{,K})$
$$= (1/3!)\varepsilon^{KLM}\varepsilon_{klm}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}x^m{}_{,M}$$

而 $\varepsilon^{KLM}(\varepsilon_{KLM})$ 和 $\varepsilon^{klm}(\varepsilon_{klm})$是交错张量，例如

$$\varepsilon^{KLM} \equiv e^{KLM}/G^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon_{klm} \equiv g^{\frac{1}{2}}e_{klm}$$
$$G \equiv \det\ G_{KL}, \quad g \equiv \det\ g_{kl}$$

将式(1.3.7)，与它相应的 $x^k{}_{,K}$ 式子，以及(1.3.8) 分别微分，可得以下三个恒等式：

(1.3.9) $(jX^K{}_{,k})_{;K} = 0, \quad (j^{-1}x^k{}_{,K})_{;k} = 0$

(1.3.10) $\partial j/\partial x^k{}_{,K} = x^k{}_{,K}$的余因子 $= jX^K{}_{,k}$

其中(1.3.10)是雅可比所得．在(1.3.9)中冒号(;)代表全协变微分法(参见第一分册，3.5节)．

弧长的平方，即$\mathscr{B}$中的$(ds)^2$和B中的$(dS)^2$，分别参照于空间坐标和物质坐标，是

(1.3.11) $(ds)^2 = g_{kl}dx^kdx^l, \quad (dS)^2 = G_{KL}dX^KdX^L$

运动(1.3.1)及逆运动(1.3.2)提供P处物质线元$d\boldsymbol{P}$及其变形后的像即p处的$d\boldsymbol{p}$之间的联系，即

(1.3.12) $d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{,K}dX^K = \boldsymbol{C}_K dX^K,$
$$d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{,k}dx^k = \boldsymbol{c}_k dx^k$$

其中

(1.3.13) $\boldsymbol{C}_K(X,t) \equiv \boldsymbol{p}_{,K} = \boldsymbol{p}_{,K}x^k,$
$$_K = \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})x^k{}_{,K}$$

$$(1.3.14)\qquad \mathbf{c}_k(\boldsymbol{x},t)\equiv\boldsymbol{P}_{,k}=\boldsymbol{P}_{,K}X^K{}_{,k}=\boldsymbol{G}_K(\boldsymbol{X})X^K{}_{,k}$$

由(1.3.12)作标量积，得

$$(1.3.15)\qquad (ds)^2=C_{KL}dX^KdX^L,\quad (dS)^2=c_{kl}dx^kdx^l$$

其中

$$(1.3.16)\qquad C_{KL}(\boldsymbol{X},t)\equiv\boldsymbol{C}_K\cdot\boldsymbol{C}_L=g_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}$$

$$(1.3.17)\qquad c_{kl}(\boldsymbol{x},t)\equiv\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{c}_l=G_{KL}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}$$

分别是**格林变形张量**和**柯西变形张量**．两者都是对称张量，且从(1.3.15)可见它们是正定的．由(1.3.15)和(1.3.11)还可见到，在长度没有变化即对任意方向$(ds)^2=(dS)^2$时则

$$(1.3.18)\qquad C_{KL}=G_{KL},\quad c_{kl}=g_{kl}$$

反过来，上两式成立则变形时弧长没有变化，故**局部刚性变形**的必要且充分条件是(1.3.18)．由此可见，张量C_{KL}和c_{kl}可用以**量度**P点或p点邻域内的局部变形．

连续统力学中常的另外两个变形量度是上述张量的逆(参见Eringen,1962,第4节)：

$$(1.3.19)\qquad \overset{-1}{C}{}^{KL}\equiv B^{KL}\equiv g^{kl}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}$$

$$(1.3.20)\qquad \overset{-1}{c}{}^{kl}\equiv b^{kl}\equiv G^{KL}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}$$

它们是$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{c}$的逆张量这一事实可验证如下：

(1.3.21)

$$\overset{-1}{C}{}^{KM}\cdot C_{ML}=g^{kl}X^K{}_{,k}X^M{}_{,l}g_{rs}x^r{}_{,M}x^s{}_{,L}$$
$$=g^{kl}g_{ls}X^K{}_{,k}x^s{}_{,L}=\delta^k_s X^K{}_{,k}x^s{}_{,L}=\delta^K_L.$$

因而，如果知道 C_{KL} 和 c_{kl}，可用类似(1.2.11)的方式计算 $\overset{-1}{C}{}^{KL}$ 和 $\overset{-1}{c}{}^{kl}$，例如，

(1.3.22) $$\overset{-1}{C}{}^{KL}=-\frac{1}{2\det\ C_{RS}}e^{KPQ}e^{LMN}C_{PM}C_{QN}$$

张量 $\overset{-1}{C}{}^{KL}$ 和 $\overset{-1}{c}{}^{kl}$ 分别称为皮奥拉(*Piola*)变形张量和芬格(Finger)变形张量．有时 C_{KL} 称为右柯西-格林张量，而 b^{kl} 称为左柯西-格林张量(参见 *Truesdell* 和 *Noll*,1965,23.8节)．

在变形体$\mathscr{B}$和未变形体 B 中含有相同物质点的线元平方之差说明由于变形长度有变化．如果对任何一对相邻物质点 $(ds)^2=(dS)^2$，则变形中这一对的距离没有变化．我们说物体作了一个刚体位移，如果对所有物质点 $(ds)^2=(dS)^2$．由(1.3.11)和(1.3.15)计算得

(1.3.23) $$(ds)^2-(dS)^2=2E_{KL}dX^KdX^L$$
$$=2e_{kl}dx^kdx^l$$

其中 E_{KL} 和 e_{kl} 分别是拉格朗日和欧拉应变张量，其定义为

(1.3.24) $$2E_{KL}=2E_{LK}=C_{KL}(\boldsymbol{X},t)-G_{KL}(\boldsymbol{X})$$

(1.3.25) $$2e_{kl}=2e_{kl}=g_{kl}(\boldsymbol{x})-c_{kl}(\boldsymbol{x},t)$$

由(1.3.23)易见

(1.3.26) $E_{KL}=e_{kl}x^{k}{}_{,K}x^{l}{}_{,L}$, $e_{kl}=E_{KL}X^{K}{}_{,k}X^{L}{}_{,l}$

由 (1.3.23) 可知，当且仅当 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{e}$ 等于零时变形才是刚性的，所以这两个张量可以当作局部变形的一个量度.

位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 定义为 B 的物质点 P 到变形体中同一物质点的矢量(图1.3.1)，故①

(1.3.27) $$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{b}$$

以此代入(1.3.13)和(1.3.14)计算得

(1.3.28) $$\boldsymbol{C}_K=\boldsymbol{P}_{,K}+\boldsymbol{U}_{,K}=\boldsymbol{G}_K+U_{M;K}\boldsymbol{G}^M$$
$$\boldsymbol{c}_k=\boldsymbol{p}_{,k}-\boldsymbol{u}_{,k}=\boldsymbol{g}_k-u_{m;k}\boldsymbol{g}^m$$

其中分号(;)代表协变偏微分法〔参见第一分册，方程(2.5.9)〕. 将它们代入(1.3.16)和(1.3.17)得

(1.3.29)

$$C_{KL}=G_{KL}+2E_{KL}=G_{KL}+U_{K;L}+U_{L;K}+U^{M}{}_{;K}U_{M;L}$$

$$c_{kl}=g_{kl}-2e_{kl}=g_{kl}-u_{k;l}-u_{l;k}+u^{m}{}_{;k}u_{m;l}$$

微分矢量 $d\boldsymbol{p}$ 和 $d\boldsymbol{P}$ 由

(1.3.30) $$d\boldsymbol{p}=(G_{MK}+U_{L;K})\boldsymbol{G}^M dX^K,$$
$$d\boldsymbol{P}=(g_{mk}-u_{m;k})\boldsymbol{g}^m dx^k$$

给出，或用分量记号表示

① 译注 下式中矢量 b 由未变形体坐标原点O指向变形体坐标原点 o，它是常矢量.

(1.3.31) $$dx^k = (G_{MK} + U_{M;K}) g^{Mk} dX^K,$$
$$dX^K = (g_{mk} - u_{m;k}) g^{Km} dx^k$$

表达式(1.3.28)到(1.3.31)当然对任意曲线坐标成立．对直角坐标，协变偏导数约化为偏导数，这些表达式可以简化．为了说明张量记号比展开的记号节约多少，下面给出直角坐标中拉格朗日和欧拉应变张量的典型分量表达式。

(1.3.32)
$$2E_{XX} = C_{XX} - 1 = 2\frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2$$
$$2E_{XY} = C_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial Y}$$

(1.3.33)
$$2e_{xx} = 1 - c_{xx} = 2\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$
$$2e_{xy} = -c_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

其中 (U,V,W) 和 (u,v,w) 分别是位移矢量参照拉格朗日和欧拉坐标的直角分量．

在线性理论中往往采用**无限小应变张量** $\widetilde{E}_{KL}$ 和 $\widetilde{e}_{kl}$，以及**无限小转动张量** $\widetilde{R}_{KL}$ 和 $\widetilde{r}_{kl}$，其定义为

(1.3.34)

$$\widetilde{E}_{KL} \equiv \frac{1}{2}(U_{K;L}+U_{L;K}) \equiv U_{(K;L)},$$
$$\widetilde{e}_{kl} \equiv \frac{1}{2}(u_{k;l}+u_{l;k}) \equiv u_{(k;l)}$$
$$\widetilde{R}_{KL} \equiv \frac{1}{2}(U_{K;L}-U_{L;K}) \equiv U_{[K;L]},$$
$$\widetilde{r}_{kl} \equiv \frac{1}{2}(u_{k;l}-u_{l;k}) \equiv u_{[k;l]}$$

由此可得

(1.3.35) $\quad U_{K;L}=\widetilde{E}_{KL}+\widetilde{R}_{KL}, \quad u_{k;l}=\widetilde{e}_{kl}+\widetilde{r}_{kl}$

以此代入(1.3.29)得

(1.3.36)

$$C_{KL}=G_{KL}+2E_{KL}=G_{KL}+2\widetilde{E}_{KL} + (\widetilde{E}^{M}_{K}+\widetilde{R}^{M}_{K})(\widetilde{E}_{ML}+\widetilde{R}_{ML})$$

$$c_{kl}=g_{kl}-2e_{kl}=g_{kl}-2\widetilde{e}_{kl} + (\widetilde{e}^{m}_{k}+\widetilde{r}^{m}_{k})(\widetilde{e}_{ml}+\widetilde{r}_{ml})$$

在特殊的物理条件下，可略去(1.3.36)式中这个或那个乘积项，得到各种近似的表达式。例如，当$|\widetilde{E}_{KL}|\ll 1$时$\widetilde{E}^{M}_{K}\widetilde{E}_{ML}$与其他项相比可略去。当$\widetilde{R}_{KL}$与$\widetilde{E}_{KL}$相比也是小量时，得$E_{KL}\simeq\widetilde{E}_{KL}$和$e_{kl}\simeq\widetilde{e}_{kl}$。这情况中(1.3.36)经线性化成为

(1.3.37) $\quad \widetilde{E}_{KL}\simeq e_{kl}g^{k}_{K}g^{l}_{L} \quad \widetilde{e}_{kl}\simeq E_{KL}g^{K}_{k}g^{L}_{l}$

于是在线性理论(无限小变形理论)中，拉格朗日和欧拉应变张量之间的差别消失了。

无限小转动张量$\widetilde{r_{kl}}$和$\widetilde{R_{KL}}$是反对称的．在三维空间中① 存在对偶的矢量$\widetilde{r^k}$和$\widetilde{R^K}$，使得

(1.3.38)

$$2\widetilde{R^K}\equiv\varepsilon^{KLM}\widetilde{R_{ML}},\quad \widetilde{R_{KL}}=-\varepsilon_{KLM}\widetilde{R^M}$$

$$2\widetilde{r^k}\equiv\varepsilon^{klm}\widetilde{r_{ml}},\quad \widetilde{r_{kl}}=-\varepsilon_{klm}\widetilde{r^m}$$

最后，下面给出应变张量的物理分量 $e\left\{\begin{smallmatrix}k\\l\end{smallmatrix}\right\}$，**用位移矢量的物理分量** $u^{(k)}$ 表达出来．按照第一分册，2.4节，我们有

(1.3.39) $$u^k=u^{(k)}/(g_{kk})^{\frac{1}{2}},\quad e\left\{\begin{smallmatrix}k\\l\end{smallmatrix}\right\}=e^k_l(g_{kk}/g_{ll})^{\frac{1}{2}}$$

从$(1.3.29)_2$得

(1.3.40) $$2e^k_l=u^k{}_{;l}+g^{km}g_{ln}u^n{}_{;m}-g^{km}g_{pn}u^p{}_{;m}u^n{}_{;l}$$

另外有

(1.3.41) $$u^k{}_{;l}=u^k{}_{,l}+\left\{\begin{smallmatrix}k\\l\ r\end{smallmatrix}\right\}u^r=\left(u^{(k)}/(g_{kk})^{\frac{1}{2}}\right)_{,l}+\sum_{r=1}^{3}\left\{\begin{smallmatrix}k\\l\ r\end{smallmatrix}\right\}u^{(r)}(g_{rr})^{-\frac{1}{2}}$$

如以此代入(1.3.40)，并将结果代进$(1.3.39)_2$，可得以$u^{(k)}$表达的$e\left\{\begin{smallmatrix}k\\l\end{smallmatrix}\right\}$．类似地无限小应变和转动的物理分量可用$u^{(k)}$表达出．

---

① 译注　在三维空间里，一个反对称张量的九个分量中三个为零，其余六个组成正负号相反的三对，即张量可由三个数完全确定，因而存在着与之对偶的三维矢量．更高维空间中反对称张量没有这性质．

所有以上对变形的分析中都采用了物质参照架$\boldsymbol{X}$作为参照位形.有些问题①中,更方便的是采用某一特定时刻t的空间位形作为参照位形，并在后来的可变时刻τ②量测相对于这位形的变化。于是，设ξ是物质点$\boldsymbol{X}$在时刻τ占据的地位，则有

(1.3.42) $$\xi = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$$

利用(1.3.2)它成为

(1.3.43) $$\xi = \boldsymbol{x}\Big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),\tau\Big) \equiv \boldsymbol{x}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau)$$

其中$\boldsymbol{x}_{(t)}$称为**相对变形函数**．于是在时刻t占据地位$\boldsymbol{x}$的那个物质点在时刻τ占据地位ξ．设(1.3.43)可逆，即

(1.3.44) $$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\xi,\tau)$$

故相对变形的雅可比行列式

(1.3.45) $$J_{(t)}(\tau) \equiv \det\ (\partial\xi^{\alpha}/\partial x^{l}) > 0$$

注意$J_{(t)}(t)=1$．相对变形梯度的定义是

(1.3.46) $$\xi^{\alpha}{}_{,l} \equiv F^{\alpha}_{(t)l} \equiv \partial\xi^{\alpha}/\partial x^{l}, \quad \boldsymbol{F}_{(t)}(\tau) \equiv \nabla\xi$$

它显然满足

(1.3.47) $$\xi^{\alpha}{}_{,l}(t) = \delta^{\alpha}_{l} \text{ 或 } \boldsymbol{F}_{(t)}(t) = \boldsymbol{I}$$

---

① 译注 特别是流动问题，那里不象固体变形问题里存在着“自然的”未经畸变的状态.

② 译注 包括时刻t，即$\tau \geqslant t$，显然$\tau = t$时相对变化为零.下文所说$J_{(t)}(t)=1$和(1.3.47)说明这性质.

设$\boldsymbol{F}_{(t')}$和$\boldsymbol{F}_{(t)}$是两个相对变形梯度，则它们之间有关系

$$(1.3.48)\qquad \boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)=\boldsymbol{F}_{(t')}(\tau)\boldsymbol{F}_{(t)}(t')$$

这可用如下的链式法则得到．由定义，有

$$(1.3.49)\qquad \xi=\boldsymbol{x}_{(t')}(\boldsymbol{x}',\tau)=\boldsymbol{x}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau)$$

设时刻t的$\boldsymbol{x}$是相对于时刻t'的$\boldsymbol{x}'$相对参照位形，则我们还有

$$(1.3.50)\qquad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{(t')}(\boldsymbol{x}',t)$$

链式法则给出

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^l}=\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^m}{\partial x^l},$$

而这无非就是(1.3.48)．

与前述变形和应变量度相对应，从相对位移梯度也可以形成相对变形和应变量度．这仅需把$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{F}^{-1}$代之以$\boldsymbol{F}_{(t)}$和$\boldsymbol{F}_{(t)}^{-1}$即可得到，例如

(1.3.51)

$$c_{(t)kl}\equiv g_{\alpha\beta}\xi^\alpha{}_{,k}\xi^\beta{}_{,l}\quad 或\quad \boldsymbol{c}_{(t)}(\tau)=\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)^T\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)$$

$$b^{kl}_{(t)}\equiv \overset{-1}{c}{}^{kl}_{(t)}=\gamma^{\alpha\beta}x^k{}_{,\alpha}x^l{}_{,\beta}\quad 或\quad \boldsymbol{b}_{(t)}(\tau)=\boldsymbol{F}_{(\tau)}(t)\boldsymbol{F}_{(\tau)}(t)^T$$

其中$g_{\alpha\beta}(\xi)$是x^k坐标里的度量张量，而$\gamma^{\alpha\beta}(\xi)$是$\xi^\alpha$坐标里度量张量的逆．在变形量度$\boldsymbol{C}(t)$，$\boldsymbol{b}(t)$和相应的相对量度$\boldsymbol{c}_{(t)}(\tau)$，$\boldsymbol{b}_{(t)}(\tau)$之间，存在着关系，即

$$C_{KL}(\tau)=g_{\alpha\beta}\xi^\alpha{}_{,K}\xi^\beta{}_{,L}=g_{\alpha\beta}\xi^\alpha{}_{,k}\xi^\beta{}_{,l}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}=c_{(t)kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}$$

$$B^{KL}(\tau)=\gamma^{\alpha\beta}X^K{}_{,\alpha}X^L{}_{,\beta}=\gamma^{\alpha\beta}x^k{}_{,\alpha}x^l{}_{,\beta}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}$$

于是有

$$(1.3.52)\qquad \boldsymbol{C}(\tau)=\boldsymbol{F}(t)^T\boldsymbol{c}_{(t)}(\tau)\boldsymbol{F}(t),$$

$$\boldsymbol{B}_{(t)}(\tau)=\overset{-1}{\boldsymbol{F}}(t)\boldsymbol{b}_{(t)}(\tau)\overset{-1}{\boldsymbol{F}}(t)^T$$

与(1.3.27)类似，可以引进相对变形矢量，并导出应变和变形量度的表达式．这些颇易做到，且在理论发展中用处不大．

1.4 长度和角的变化

在$\boldsymbol{X}$处有一无限小平行六面体，其边矢量为$\boldsymbol{G}_1dX^1$，$\boldsymbol{G}_2dX^2$和$\boldsymbol{G}_3dX^3$，它在变形后变成$\boldsymbol{x}$处的平行六面体，相应的边矢量是$\boldsymbol{C}_1dX^1$，$\boldsymbol{C}_2dX^2$和$\boldsymbol{C}_3dX^3$(图1.4.1)：

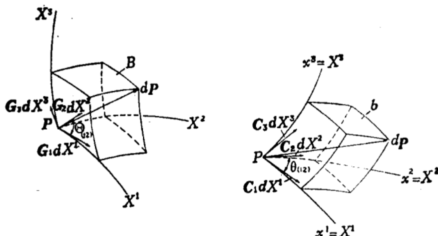


图 1.4.1　曲线平行六面体的变形

(1.4.1) $$dP = G_K dX^K, \quad dp = C_K dX^K$$

如果N和n分别是沿dP和dp的单位矢量，则有

(1.4.2) $$N^K \equiv dX^K/dS, \quad n^k \equiv dX^k/ds$$

其中$dS = |dP|$和$ds = |dp|$.

伸缩比(*stretch*) $\Lambda_{(\mathbf{N})} = \lambda_{(\mathbf{n})}$ 是长度比ds/dS. 当作N的函数时写为$\Lambda_{(\mathbf{N})}$，当作n的函数时写为$\lambda_{(\mathbf{n})}$：

(1.4.3) $$\Lambda_{(\mathbf{N})} = ds/dS = (C_{KL}N^K N^L)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_{(\mathbf{n})} = ds/dS = 1/(c_{kl}n^k n^l)^{\frac{1}{2}}$$

由(1.4.3)可见C和c沿N和n方向的法向分量分别是这两个方向伸缩比平方和伸缩比平方的倒数.

伸长率(*extension*) $E_{(\mathbf{N})} = e_{(\mathbf{n})}$的定义为

(1.4.4) $$E_{(\mathbf{N})} = e_{(\mathbf{n})} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1 = (ds - dS)/dS$$

当方向N与坐标曲线X^1相切时，$N^1 = dX^1/dS^1 = 1/(G_{11})^{\frac{1}{2}}$，$N^2 = N^3 = 0$. 所以

(1.4.5)
$$\Lambda_{(1)} = (C_{11}/G_{11})^{\frac{1}{2}} = \left[1 + 2(E_{11}/G_{11})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{(1)} = \left[1 + 2(E_{11}/G_{11})\right]^{\frac{1}{2}} - 1$$

由此可得

(1.4.6) $$C_{11}/G_{11} = \Lambda^2_{(1)},$$

$$2E_{11}/G_{11} = (1 + E_{(1)})^2 - 1$$

设参考架 X^K 是直角坐标架，上式简化为

(1.4.7)

$$C_{11}=\Lambda_{(1)}^2,\quad 2E_{11}=(1+E_{(1)})^2-1=\Lambda_{(1)}^2-1$$

因而，参照于直角坐标时，格林变形张量的法向分量 C_{11} 是伸缩比的平方，而拉格朗日张量的分量 E_{11} 是伸缩比平方减一后的一半.

当伸长率小时，$E_{(1)}\ll 1$，展开$(1.4.6)_2$式得

(1.4.8)
$$E_{11}\simeq E_{(1)}\simeq\widetilde{E}_{11}$$

对 E_{22} 和 E_{33} 也有类似的结果。

边矢量 $\boldsymbol{C}_1dX^1$ 和 $\boldsymbol{C}_2dX^2$ 之间的夹角 $\theta_{(12)}$ 由

$$\cos\theta_{(12)}=\frac{\boldsymbol{C}_1dX^1}{|\boldsymbol{C}_1dX^1|}\cdot\frac{\mathbf{c}_2dX^2}{|\mathbf{c}_2dX^2|}$$

计算得，亦即

(1.4.9)
$$\cos\theta_{(12)}=\frac{C_{12}}{(C_{11}C_{22})^{1/2}}$$

$$=\frac{G_{12}+2E_{12}}{(G_{11}+2E_{11})^{1/2}(G_{22}+2G_{22})^{1/2}}$$

这为 C_{12} 和 E_{12} 提供了一个几何意义. 其实

(1.4.10)

$$2E_{12}=(G_{11}G_{22})^{\frac{1}{2}}(1+E_{(1)})(1+E_{(2)})-G_{12}$$

当伸长率与 1 比是小量且用直角坐标时，近似地有

(1.4.11)
$$2E_{12}\approx 2\widetilde{E}_{22}=\cos\theta_{(12)}$$

对无限小变形，夹角的变化是

$$(\pi/2)-\theta_{(12)}\equiv\Gamma_{(12)}$$

所以直角坐标中无限小剪切应变$\widetilde{E}_{KL}(K\neq L)$近似地是沿两坐标轴纤维夹角变化量的一半．设$\Theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$是未变形体任何两方向$\boldsymbol{N}_1\equiv d\boldsymbol{X}_1/dS_1$和$N_2\equiv d\boldsymbol{X}_2/dS_2$之间的夹角，而$\theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$是$\boldsymbol{N}_1$和$\boldsymbol{N}_2$变形后方向之间的夹角．则有

$$\cos\ \Theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)=G_{KL}\frac{dX_1^K}{dS_1}\ \frac{dX_2^L}{dS_2}=G_{KL}N_1^KN_2^L,$$

(1.4.12)

$$\cos\ \theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)=g_{kl}\frac{dx_1^k}{ds_1}\ \frac{dx_2^l}{ds_2}$$

$$=g_{kl}x^k{}_{,K}x^k{}_{,L}\ \frac{dX_1^K}{dS_1}\ \frac{dX_2^L}{dS_2}\bigg/\frac{ds_1}{dS_1}\ \frac{ds_2}{dS_2}$$

$$=\frac{C_{KL}N_1^KN_2^L}{\Lambda(\mathbf{N}_1)\Lambda(\mathbf{N}_2)}\equiv T$$

于是夹角变化($\boldsymbol{N}_1$和$\boldsymbol{N}_2$方向的剪切)由

$$\cos\ \gamma(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)=\cos\ (\theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)-\Theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2))$$

$$=\cos\ \theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)\cos\ \Theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$$

$$+\sin\ \theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)\sin\ \Theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$$

给出，其中$\cos\ \theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$和$\sin\ \theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$由(1.4.12)给出，即

(1.4.13)

$$\cos\ \gamma(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)=T\cos\ \Theta(\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2)+(1-T^2)^{\frac{1}{2}}\sin\ \Theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$$

如果$\boldsymbol{N}_1$和$\boldsymbol{N}_2$原先正交，则上式给出

(1.4.14)

$$\sin\gamma_{(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)} = T = C_{KL}N_1^K N_2^L / \Lambda_{(\mathbf{N}_1)}\Lambda_{(\mathbf{N}_2)}$$

所以，设 C_{KL} 以及 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 方向已知，就可利用 (1.4.13) 计算这两方向之间的剪切；设两方向原先正交，则用 (1.4.14)。

为了得到无限小转动张量的一个意义，我们采用诺伏日洛夫(Novozhilov 1948，第 7 节)给出一种作法. 设 P 处直角坐标架 XYZ 的 XY 平面上有一单位矢量 $\boldsymbol{N}_Z$，它在变形后成为 p 处的 $\boldsymbol{n}_Z$. 把 $\boldsymbol{n}_z$ 平行搬移到 P (图1.4.2). 设 θ_Z 是 $\boldsymbol{N}_Z$

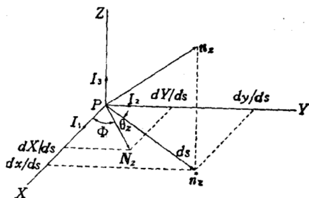


图 1.4.2 平 均 转 动

以及 $\boldsymbol{n}_z$ 在 XY 平面上投影 $\overset{*}{\boldsymbol{n}}_Z$ 之间的夹角，它可由下式求得

$$\operatorname{tg}(\Phi+\theta_Z) = \frac{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\theta_Z}{1-\operatorname{tg}\Phi\operatorname{tg}\theta_Z} = \frac{dx}{dy}$$

$$= \frac{y_{,X}dX + y_{,Y}dY}{x_{,X}dX + x_{,Y}dY}$$

将 $dX = dS\cos\Phi$ 和 $dY = dS\sin\Phi$ 代入，得

$$\operatorname{tg}\theta_Z = \frac{y_{,X}\cos^2\Phi + (y_{,Y} - x_{,X})\sin\Phi\cos\Phi - x_{,Y}\sin^2\Phi}{x_{,X}\cos^2\Phi + y_{,Y}\sin^2\Phi + (y_{,X} + x_{,Y})\sin\Phi\cos\Phi}$$

利用(1.3.31)可写出 $y_{,X} = V_{,X} = \widetilde{E}_{XY} - \widetilde{R}_{XY}$，$y_{,Y} = 1 + V_{,Y} = 1 + \widetilde{E}_{YY}$，由此得

(1.4.15)

$$\operatorname{tg}\theta_Z = \frac{-\widetilde{R}_{XY} + \widetilde{E}_{XY}\cos 2\Phi + \frac{1}{2}(\widetilde{E}_{YY} - \widetilde{E}_{XX})\sin 2\Phi}{1 + \frac{1}{2}(\widetilde{E}_{XX} + \widetilde{E}_{YY}) - \frac{1}{2}(\widetilde{E}_{YY} - \widetilde{E}_{XX})\cos 2\Phi + \widetilde{E}_{XY}\sin 2\Phi}$$

这一表达式对 Φ 是周期性的，周期是 π . 所以在 $0 < \theta_Z \leqslant \pi$ 间隔内 θ_Z 是良好确定的，除了对不可分辨的角 $\theta_Z = 0$ 和 $\theta_Z = \pi$ 以外，. 诺伏日洛夫引进对平均转动的量度，其定义为

$$\langle\operatorname{tg}\theta_Z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{tg}\theta_Z(\Phi)\,d\Phi \tag{1.4.16}$$

在(1.4.15)中，分子去掉 $-\widetilde{R}_{XY}$ 项后，正好是分母导数的一半. 被积函数这一部分积分后等于零，因而有

(1.4.17)

$$\begin{aligned}\langle\operatorname{tg}\theta_Z\rangle &= (-\widetilde{R}_{XY}/2\pi)\int_0^{2\pi}\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\widetilde{E}_{XX} + \widetilde{E}_{YY}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\widetilde{E}_{XX} - \widetilde{E}_{YY}\Big)\cos 2\Phi + \widetilde{E}_{XY}\sin 2\Phi\Big]^{-1} d\Phi \\ &= -\widetilde{R}_{XY}\Big[(1 + \widetilde{E}_{XX})(1 + \widetilde{E}_{YY}) - \widetilde{E}_{XY}^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

因而我们求得，诺氏平均转动与 $\widetilde{R}_{XY}$ 成正比，对于小应变，有近似式

(1.4.18) $$\langle \mathrm{tg}\theta_Z \rangle \simeq -\widetilde{R}_{XY}$$

对$\langle \mathrm{tg}\theta_X \rangle$和$\langle \mathrm{tg}\theta_Y \rangle$可得到相似的表达式，只要在上式中作轮换，$X$变$Y$，$Y$变$Z$，$Z$变$X$.

因为$\widetilde{R}$是一个张量，如它在一组坐标系等于零，则它在所有坐标系中均为零．于是，设在一点P处三个相互垂直平面内的平均转动是零或π弧度，则在P处经过P点任何平面平均转动是零或π弧度．平均转动等于零当且仅当存在一个位移势F使得

(1.4.19) $$U_K = F_{,K}$$

这情况中$\widetilde{\boldsymbol{R}} = 0$，这种变形称为有势变形．

1.5 柯西应变椭球面

已知物体内一点处任一组变形张量或应变张量，可以作出一个椭球面，利用它可以研究该点邻域变形的性质．

例如，考虑P处半径为K的无限小球面，它由矢量$d\boldsymbol{X}$扫描而成

(1.5.1) $$G_{KL}dX^K dX^L = (dS)^2 = K^2$$

在运动中，球面上的物质点变成p处由矢量$d\boldsymbol{x}$扫描出的二次曲面

(1.5.2) $$c_{kl}dx^k dx^l = (ds)^2 = K^2$$

由于(1.5.1)是正定的，(1.5.2)也是正定的，所以(1.5.2)是一椭球面，它称为柯西物质应变椭球面（图1.5.1）。与此相

仿，通过逆运动，p 处无限小球面

(1.5.3) $$g_{kl}dx^k dx^l = k^2$$

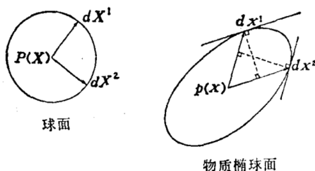


图 1.5.1 柯西物质椭球面

被带到 P 处成为椭球面

(1.5.4) $$C_{KL}dx^K dx^L = ds^2 = k^2$$

它称为柯西空间应变椭球面（图 1.5.2）。下面几个定理给出说明局部变形特征的许多有意思的性质。

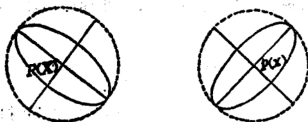


图 1.5.2 空间和物质椭球面

定理一（柯西第一定理） P 处无限小球面相互垂直的直径变形成为 p 处物质椭球面的共轭直径.

证明 设 $d\boldsymbol{X}_1$ 和 $d\boldsymbol{X}_2$ 是 P 处正交的两矢量，即

(1.5.5) $$dX_1 \cdot d\boldsymbol{X}_2 = 0$$

根据(1.3.12)，$d\boldsymbol{X}_1$ 变形成为 $\mathbf{c}_k dx_1^k$，$d\boldsymbol{X}_2$ 变形成为 $\mathbf{c}_l dx_2^l$，因而得

(1.5.6) $$c_{kl} dx_1^k dx_2^l = 0.$$

这说明椭球面在矢量 $d\boldsymbol{x}_1$ 端点处的梯度矢量 $c_{kl}dx_1^k$ 垂直于 dx_2。定理得证。

一个椭球面有三条直径垂直于它们各自的共轭平面．这是椭球面的三个主轴．所以，按照柯西第一定理，应变椭球面的三轴是三条物质线，它们原先是球面的互相垂直的三直径。于是有以下推论：

推论 1 在 B 的一点 $P(\boldsymbol{X})$ 处，至少有三条相互垂直的方向，它们在变形后仍然相互正交，并组成 $p(\boldsymbol{x})$ 处应变椭球面的主轴．

设一个变形将球面的正交三轴组变成椭球面的主轴组，它不改变正交三轴组中任两轴之间的夹角．因而有

推论 2 参照 p 处应变椭球面主轴，柯西变形张量的混合分量 $c_{kl}(k \neq l)$ 和欧拉应变张量的混合分量 $e_{kl}(k \neq l)$ 均为零．

这些结果当然对 P 处的空间椭球面成立。在 p 处的三轴组，如果当作球面的正交三直径，变形为组成 p 处空间椭球面主轴的三轴组．因而有

推论 3 变形将 P 处应变主轴转动成为 p 处应变椭球面的主轴组．

在特殊条件下，应变椭球面可能退化为回转椭球面或者球面．在退化为回转椭球面的情况中，与回转轴相垂直的平

面上每一对互相垂直的方向组成两个主轴，而第三个主轴就是回转轴。如果椭球面退化为球面，由球面直径构成的无限个数的正交三轴组都是主轴。

在变形中，P处球面的直径变成p处椭球面的直径。因而P处椭球面直径与相应球直径之比是伸缩比。故P处不同方向伸缩比的大小与p到椭球表面的距离成正比。椭球体直径相对于它们未变形方向的方向给出了转动。

椭球面主轴长度可以按最大、中间和最小来编序，因而有下面的定理。

定理 2（柯西第二定理）　在B的任意点P处，至少有三个相互垂直的方向：在其中一方向上的伸缩比不小于其他任何方向的伸缩比在；另一方向上伸缩比不大于其他任何方向伸缩比；在第三方向上伸缩比是极小化极大（*minimax*）。当它们编序为$\Lambda_{(1)} \geqslant \Lambda_{(2)} \geqslant \Lambda_{(3)}$时，它们的比值$\Lambda_{(1)} : \Lambda_{(2)} : \Lambda_{(3)}$和应变椭球面三轴长度之比一样。

这些伸缩比是与应变主轴相关的，它们称为主伸缩比。最大的伸长率$E_{(1)} = \Lambda_{(1)} - 1$沿椭球面长轴发生，最小的$E_{(3)}$沿其短轴发生。沿应变椭球面主轴发生的伸长率称为主伸长率。

局部变形的图象现已清楚。在P点球面各物质点分三步达到它们在p处椭球面上的变形位置(图1.5.3)：

(a) 中心在P的无限小球面作刚性平移达到点p。

(b) 球面绕过p的一轴作刚性转动，使得P处应变椭球面主轴与它们在P处的变形方向相重合。

(c) 球的直径受到伸缩，使和p处椭球面主轴相重合。

以上前两步(a)和(b)保持任两物质点之间距离不变。所以它们称为刚体移动。在第三步（c）中距离有变化。这些步

骤的次序是任意的．例如，P处的球可以先受伸缩，而后作刚性转动，再作刚性平移到p．这个结果可叙述为下面的定理．

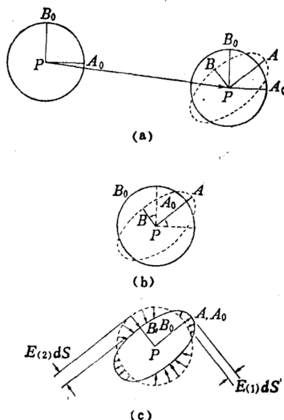


图 1.5.3 P邻域的变形：(a) 平移，(b) 转动，(c) 纯应变．

定理 3　B的一点处任何线元的变形可认为是以下三者的结果：刚性平移，应变主轴的刚性转动，以及沿主轴的伸缩．

1.6 应变不变量 主方向

上节里见到，变形时P处应变椭球面的主方向变为p处的主方向，参照于主轴时变形张量和应变张量的混合分量等于零，且沿主方向的伸缩比取得极值．现设想用分析方法确定主应变和主方向．为此计算伸缩比

$$(1.6.1)\quad \Lambda^2(\mathbf{N}) = C_{KL}N^KN^L = 2E_{KL}N^KN^L + 1,\quad N^K \equiv dX^K/dS$$

的极值，式中设N^K在P处变化，且满足它是单位矢量条件

$$(1.6.2)\qquad G_{KL}N^KN^L = 1$$

利用拉格朗日乘子法，令

$$\frac{\partial}{\partial N^M}(\Lambda^2(\mathbf{N})) = \frac{\partial}{\partial N^M}\Big[C_{KL}N^KN^L - C(G_{KL}N^KN^L - 1)\Big] = 0$$

其中C是未知拉格朗日乘子．作出微分运算，得到三个线性齐次方程

$$(1.6.3)\qquad (C_{KL} - CG_{KL})N^L = 0$$

如用$C_{KL} = 2E_{KL} + G_{KL}$，上式可写为

$$(1.6.4)\qquad (E_{KL} - EG_{KL})N^L = 0$$

其中

(1.6.5) $$2E\equiv C-1$$

可以研究(1.6.3)和(1.6.4)中任一组. 利用 C_{KL} 和 E_{KL} 的关系以及(1.6.5), 可以由 C 语言翻译为 E 语言, 或者反过来.

式(1.6.3)可简写为

(1.6.6) $$(C^K{}_L - C\delta^K{}_L)N^L = 0$$

这组方程有非平凡解如果 N^L 的系数行列式或特征行列式等于零, 即

(1.6.7) $$|C^K{}_L - C\delta^K{}_L| = 0$$

将行列式展开, 得 C 的一个三次方程, 即

(1.6.8) $$-C^3 + I_C C^2 - II_C C + III_C = 0$$

其中

(1.6.9)

$$I_C \equiv (1/1!)\delta^K{}_L C^L{}_K,\quad II_C \equiv (1/2!)\delta^K{}_L{}^M{}_N C^L{}_K C^N{}_M$$
$$III_C \equiv (1/3!)\delta^K{}_L{}^M{}_N{}^P{}_Q C^L{}_K C^N{}_M C^Q{}_P \equiv \det C^K{}_L$$

是变形张量 C 的主不变量(参见第一分册, 1.10节). 这里 $\delta^K{}_L{}^M{}_N$ 和 $\delta^K{}_L{}^M{}_N{}^P{}_Q$ 是广义克氏符号, 它们可用排列符号表示出来(参见分册, Ⅰ.1.9节):

$$\delta^K{}_L{}^M{}_N{}^P{}_Q = e^{KMP}e_{LNQ},\quad \delta^K{}_L{}^M{}_N = \delta^K{}_L{}^M{}_N{}^P{}_P$$

特征方程(1.6.8)有三个根 $C_\alpha(\alpha=1,2,3)$, 称为特征数 (*proper numbers*) (或称主值或特征值). 主不变量(1.6.9)

可用特征数表达为

$$(1.6.10)\qquad \begin{aligned} I_C &= C_1 + C_2 + C_3, \\ II_C &= C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 \\ III_C &= C_1C_2C_3 \end{aligned}$$

对应于每一个 C_α，可由(1.6.6)得到一方向$N^L{}_\alpha$。如特征数是实数且互异，则相应方向是实的且互异。因张量C_{KL}是实的且对称、它满足第一分册，1.11 节，定理 1，因而特征数和主方向是实的。当特征数互异时，按照第一分册.1.11 节，定理 3，特征方向[1] 互相正交，即

$$(1.6.11)\qquad G_{KL}N^K_\alpha N^L_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

当特征数有相重性时，对应每一相重的特征数存在无限多个主方向。当特征数中两个相等，则有一个平面其中所有方向都构成主方向；当三个相等，则过P所有的方向都是主方向。前一情况里柯西椭球面是轴对称的，其对称轴是一个主方向。显然在过P且垂直于对称轴的平面上，正交的任何两轴也都是主轴。在三个根相同的情况里，柯西椭球面退化为一球面，这时过P的任一方向都是主轴。以上所有情况中，都可将C_{KL}归化为对角型，这在第一分册，1.11 节讨论过。为此写出(1.6.3)中关于C_β的式子：

$$(1.6.12)\qquad C_{KL}N^L{}_\beta = C_{\underline{\beta}}G_{KL}N^L{}_{\underline{\beta}}$$

以$N^K{}_\alpha$乘此式并用(1.6.11)，得

$$(1.6.13)\qquad C_{KL}N^K{}_\alpha N^K{}_\beta = C_{\underline{\beta}}\delta_{\alpha\underline{\beta}}$$

---

① 译注　即主方向。

如选取坐标 X^K 使得与主方向 N_α 相重合，则 $N^K_\alpha=\delta^K_\alpha$，参照于这些方向可写

$$C_{KL}N^K_\alpha N^K_\beta\equiv C_{\alpha\beta} \tag{1.6.14}$$

并由(1.6.13)求得 $C_{\alpha\beta}$ 是对角型的，即

$$\|C_{\alpha\beta}\|=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \tag{1.6.15}$$

参照于主三轴组 X^α，应变椭球面的方程简化为

$$(dS)^2=k^2=C_{KL}dx^K dx^L = \sum_\alpha C_\alpha (dX^\alpha)^2. \tag{1.6.16}$$

因为 X^α 是直角坐标且 $C^\alpha>0$，应变椭球面的半轴为 $a_\alpha=ds/(C_\alpha)^{\frac{1}{2}}=k/(C_\alpha)^{\frac{1}{2}}$(图1.6.1)。沿主轴方向的伸缩比 $\Lambda_\alpha=\lambda_\alpha$ 为

(1.6.17)

$$\Lambda_\alpha=k/dX^\alpha=(C_\alpha)^{\frac{1}{2}}=k/a_\alpha,$$

$$X_\alpha=dx^\alpha/K=1/(c_\alpha)^{\frac{1}{2}}=a_\alpha/K$$

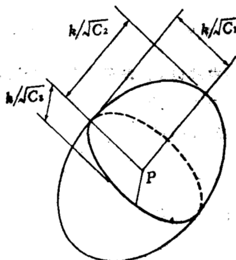


图 1.6.1 应变椭球面的半轴

其中c_α是$c^k{}_l$的特征数。因为$\Lambda_\alpha=\lambda_\alpha$，故有

$$(1.6.18)\qquad C_\alpha=1/c_\alpha=\lambda_\alpha^2=\Lambda_\alpha^2$$

下列定理得证.

定理 1　P处应变椭球面半轴长是p处应变椭球面半轴长的倒数，两者特征数互为倒数. 特征数C_α等于沿P处应变椭球面主轴伸缩比之平方.沿主轴方向伸缩比取得极值.

以上构成了柯西第二定理的一个代数证明.

定理 2　变形将P处空间椭球面主轴转成为p处物质椭球面主轴.

要证明这定理先将$\mathbf{N}_\alpha$用$\mathbf{n}_\alpha$表达. 为此注意到

$$(1.6.19)\qquad N^K=\frac{dX^K}{dS}=X^K{}_{,k}\frac{dx^k}{dS}\quad\frac{ds}{dS}$$
$$=X^K{}_{,k}n^k\Lambda_{(\mathbf{N})}$$

由于(1.6.18)上式使人想起

$$(1.6.20)\qquad N^K_\alpha=X^K{}_{,k}n^k_{\underline{\alpha}}/(c_{\underline{\alpha}})^{\frac{1}{2}}$$

是所求的以$\mathbf{n}_\alpha$表示的$\mathbf{N}_\alpha$表达式. 要完成证明还得求证：(a) 当n^K_α互相垂直时N^K_α也互相垂直；(b) N^K_α满足(1.6.12)当n^k_α满足

$$(1.6.21)\qquad c_{kl}n^l_\alpha=c_{\underline{\alpha}}\,g_{kl}n^l{}_{\underline{\alpha}}$$

为证明(a)，组成

$$G_{KL}N^K_\alpha N^L_\beta=G_{KL}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}n^k_{\underline{k}}n^l_{\underline{\beta}}/(c_{\underline{\alpha}}c_{\underline{\beta}})^{\frac{1}{2}}$$
$$=c_{kl}n^k_{\underline{\alpha}}n^l_{\underline{\beta}}/(c_{\underline{\alpha}}c_{\underline{\beta}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= (c_\alpha/c_\beta)^{\frac{1}{2}} g_{kl} n_\alpha^k n_\beta^l = \delta_{\alpha\beta},$$

其中第二行由第一行利用(1.3.17)引出，而第三行由利用(1.6.21)得到。为证明(b)，组成

$$C_{KL}N_\alpha^L = (c_\alpha)^{-\frac{1}{2}} g_{kl} x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} X^L{}_{,m} n_\alpha^m$$
$$= (c_\alpha)^{-\frac{1}{2}} g_{kl} x^k{}_{,K} n_\alpha^l = c_{kl} n_\alpha^l x^k{}_{,K}/c_\alpha (c_\alpha)^{\frac{1}{2}}$$
$$= G_{PM} X^P{}_{,k}/X^M{}_{,l} x^k{}_{,K} n_\alpha^l / c_\alpha (c)_\alpha^{\frac{1}{2}}$$
$$= G_{KM} X^M{}_{,l} n_\alpha^l / c_\alpha (c_\alpha)^{\frac{1}{2}} = G_{KM} N_\alpha^M / c_\alpha$$

第一行中对C_{KL}用了(1.3.16)。利用(1.6.21)由第行引出第二行。用(1.3.17)得第三行，再用(1.6.20)得第四行。

这些结果说明(1.6.20)提供了特征方向$\boldsymbol{N}_\alpha$(连同特征数C_α)和$\boldsymbol{n}_\alpha$(连同特征数c_α)之间的一一对应关系，运动将$\boldsymbol{N}_\alpha$变成$\boldsymbol{n}_\alpha$，逆运动将$\boldsymbol{n}_\alpha$变成$\boldsymbol{N}_\alpha$。由此完成了定理的证明。这定理也构成柯西第一定理推论3的分析证明。柯西第一定理和其他推论的证明包含在这里边以及在结果(1.6.11)和(1.6.15)之中。

由(1.6.20)和(1.6.18)还有

$$(1.6.22) \quad n_\alpha^k = x^k{}_{,K} N_\alpha^k/(C_\alpha)^{\frac{1}{2}} = x^k{}_{,K} N_\alpha^K (c_\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

这些结果的几何解释如下：

格林变形张量$\boldsymbol{C}$和柯西变形张量$\boldsymbol{c}$可表征为这样两个唯一确定的张量：它们的主轴分别是P处和p处柯西应变椭球面主轴，它们的特征数分别是主伸缩比的平方和平方的倒数.

在坐标变换中，物理长度保持不变，因而C_α保持不变，并

由(1.6.10)，量 I_C，II_C 和 III_C 保持不变。由此得以下定理。

定理 3　量 I_C, II_C 和 III_C 对 P 处任何坐标变换不变。

再有，用以唯一地表征三维空间中二次曲面所需的主轴数不超过三，因而有

定理4 三维空间中，一个二阶张量的独立不变量的个数不超过三。

不变量可以由应变诸量度 $E_{KL}, \tilde{E}_{KL}, e_{kl}, \tilde{e}_{kl}, c_{kl}, \overset{-1}{C}_{KL}, \overset{-1}{c}_{kl}$ 等组成。这些可由在(1.6.9)中将张量 $\boldsymbol{C}$ 代换成这些张量得到。

如用关系式

$$2E^K{}_L = C^K{}_L - \delta^K{}_L, \quad 2e^k{}_l = \delta^k{}_l - c^k{}_l$$

可以证明

(1.6.23)

$$I_C = 3 + 2I_E, \qquad 2I_E = -3 + I_C$$
$$II_C = 3 + 4I_E + 4II_E, \qquad 4II_E = 3 - 2I_C + II_C$$
$$III_C = 1 + 2I_E + 4II_E + 8III_E, \qquad 8III_E = -1 + I_C - II_C + III_C$$

(1.6.24)

$$I_c = 3 - 2I_e, \qquad 2I_e = 3 - I_c$$
$$II_c = 3 - 4I_e + 4II_e, \qquad 4II_e = 3 - 2I_c + II_c$$
$$III_c = 1 - 2I_e + 4II_e - 8III_e, \qquad 8III_e = 1 - I_c + II_c - III_c$$

用主伸缩量 $\lambda_{(\alpha)}$ 表达，则还有

(1.6.25)

$$I_C = I_{\overset{-1}{c}} = \lambda^2_{(1)} + \lambda^2_{(2)} + \lambda^2_{(3)},$$

$$I_c = I_{\overset{-1}{C}} = \lambda^{-2}_{(1)} + \lambda^{-2}_{(2)} + \lambda^{-3}_{(8)},$$

$$II_C = II_{c^{-1}} = \lambda^2_{(1)}\lambda^2_{(2)} + \lambda^2_{(2)}\lambda^2_{(3)} + \lambda^2_{(3)}\lambda^2_{(1)},$$

$$II_c = II_{C^{-1}} = \lambda^{-2}_{(1)}\lambda^{-2}_{(2)} + \lambda^{-2}_{(2)}\lambda^{-2}_{(3)} + \lambda^{-2}_{(3)}\lambda^{-2}_{(1)}$$

$$III_C = III_{c^{-1}} = \lambda^2_{(1)}\lambda^2_{(2)}\lambda^2_{(3)},$$

$$III_c = III_{C^{-1}} = \lambda^{-2}_{(1)}\lambda^{-2}_{(2)}\lambda^{-2}_{(3)}$$

由此可得恒等式

(1.6.26)

$$I_c = II_C/III_C,\quad II_c = I_C/III_C,\quad III_c = 1/III_C$$

因为 $0 < \lambda_{(\alpha)} < \infty$，可见

(1.6.27)

$$0 < I_C, II_C, III_C < \infty,\quad 0 < I_c, II_c, III_c < \infty$$

对刚性变形有 $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)} = 1$．因而局部刚性变形的必要且充分条件是

(1.9.28) $\quad I_C = II_C = 3,\quad III_C = 1$

从 (1.6.25) 可见，当伸缩比大时，I_C, II_C 和 III_C 是大的而 I_c, II_c, III_c 是小的．对小的伸缩比则相反．

当 I_C, II_C 和 III_C 为已知且满足(1.6.27)，可由 (1.6.8) 唯一地确定 C_α，如还① 知道 P 处任一三轴组，则变形张量 C 被唯一地确定．

按照柯西第二定理(1.5节)，沿应变椭球面主轴的主应变

① 译注　原文无"还"一字．据作者另一著作(Eringen1962，P. 32) 增．

取得极值．提出一个关于剪切分量的极值问题，这由下述定理回答．

定理 5 在$\boldsymbol{X}$处$\boldsymbol{C}$的剪切分量在$\boldsymbol{X}$处一对方向上取极值，这一对方向垂直于$\boldsymbol{C}$的一主轴，且平分其余两主轴的夹角．$\boldsymbol{C}$的剪切分量的极值是

(1.6.29)

$$\pm\frac{1}{2}(C_1-C_2),\quad \pm\frac{1}{2}(C_2-C_3),\quad \pm\frac{1}{2}(C_3-C_1)$$

为证明这定理，考虑正交两方向$\boldsymbol{N}_1$和$\boldsymbol{N}_2$的由 (1.4.14) 给出的剪切，它可写为

(1.6.30)

$$F(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2)=\Lambda_{(\mathbf{N}_1)}\Lambda_{(\mathbf{N}_2)}\sin\gamma_{(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)}=C_{KL}N_1^KN_2^L$$

因为$\boldsymbol{N}_1$和$\boldsymbol{N}_2$是单位矢量，且互相垂直，有

(1.6.31)

$$G_{KL}N_1^KN_1^L=1,\quad G_{KL}N_2^KN_2^L=1,\quad G_{KL}N_1^KN_2^L=0$$

于是我们必须求出$F(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2)$在条件(1.6.31)下的驻值．利用拉格朗日乘子$A$，$B$，和$D$，将下式对$N_1^K$，$N_2^K$微分：

$$F=C_{KL}N_1^KN_2^L-AG_{KL}N_1^KN_2^L-\frac{1}{2}B(G_{KL}N_1^KN_1^L-1)$$

$$-\frac{1}{2}D(G_{KL}N_2^KN_2^L-1)$$

并令所得导数等于零，得

(1.6.32)

$$C_{KL}N_2^L-AG_{KL}N_2^L-BG_{KL}N_1^L=0$$

$$C_{KL}N_1^L-AG_{KL}N_1^L-DG_{KL}N_2^L=0$$

由此可见 $D=B$。两式相加和相减得

(1.6.33)

$$C_{KL}(N_1^L+N_2^L)-(A+B)G_{KL}(N_1^L+N_2^L)=0$$
$$C_{KL}(N_1^L-N_2^L)-(A-B)G_{KL}(N_1^L-N_2^L)=0$$

约束条件 (1.6.31) 表明 $N_1\pm N_2\neq 0$。将(1.6.33)中每一式和决定张量 C_{KL} 主方向 $\boldsymbol{M}$ 的方程(其特征数是C_α)

(1.6.34) $$C_{KL}M^L-CG_{KL}M^L=0$$

相比较，可见 $A-B$ 和 $A+B$ 是 C_{KL} 的特征数,即

$$C_\alpha=A+B,\quad C_\beta=A-B,\quad C_\alpha\neq C_\beta$$

因而

(1.6.35)

$$A=\frac{1}{2}(C_\alpha+C_\beta),\quad B=\frac{1}{2}(C_\alpha-C_\beta).$$

C_{KL} 的主方向 $\boldsymbol{M}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 的关系是

$$\boldsymbol{M}_\alpha=k_1(\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2),\quad \boldsymbol{M}_\beta=k_2(\boldsymbol{N}_1-\boldsymbol{N}_2).$$

如对上面每一式要求$G_{KL}M_\alpha^KM_\alpha^L=1$，并利用和 (1.6.33) 和 (1.6.35)，求得 $k_1=k_2=\frac{1}{2}$，因而有

(1.6.36)

$$\boldsymbol{M}_\alpha=\frac{1}{2}(\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2)\qquad \boldsymbol{M}_\beta=\frac{1}{2}(\boldsymbol{N}_1-\boldsymbol{N}_2)$$

由此解得$\boldsymbol{N}_1$ 和$\boldsymbol{N}_2$:

$$(1.6.37)\quad \boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_\alpha+\boldsymbol{M}_\beta,\quad \boldsymbol{N}_2=\boldsymbol{M}_\alpha-\boldsymbol{M}_\beta.$$

于是我们证明了：剪切取极值的任一对正交方向$\boldsymbol{N}_1$和$\boldsymbol{N}_2$平分应变C_{KL}主方向的夹角．另外，参照于这些方向，剪切的极值由（1.6.35）给出．如C_α编序为$C_1>C_2>C_3$，则剪切值由（1.6.29）给出．正负号±是由A和B的正负号引起的．因而最大剪切应变是$(C_1-C_3)/2$，并作用在$\boldsymbol{M}_1$和$\boldsymbol{M}_3$的平分方向上．证明完毕．

有各种类型的几何作图法用以决定C_{KL}的主轴和最大剪切，其中最常用的是摩尔(*Mohr*)圆．有关这方面读者可参见*Truesdell*和*Toupin*(1960,21到24节)和工科材料力学的书籍(参见*Freudenthal*,1966,6.6节)．

1.7 转　动

物体内一纤维的有限转动不能用无限小转动张量$\widetilde{\boldsymbol{R}}$和$\widetilde{\boldsymbol{r}}$表示．为了表征有限转动我们引进一个转动张量$\boldsymbol{R}$如下．根据上节的定理2，变形中$P$处主三轴组$\boldsymbol{N}_\alpha$转动成为$p$处的主三轴组$\boldsymbol{n}_\alpha$．如将$\boldsymbol{N}_\alpha$平行于自身地搬移到$p$，则可以唯一地确定一个正交张量$\boldsymbol{R}$，它将搬移过的$\boldsymbol{N}_\alpha$转动成为$\boldsymbol{n}_\alpha$(图1.7.1)，其数学表达式为

$$(1.71.)\qquad n^k{}_\alpha=R^k{}_K N^K{}_\alpha,\ N^K{}_\alpha=\overset{-1}{R}{}^K{}_k n^k{}_\alpha$$

将上面一个式代入另一式可见

$$(1.7.2)\qquad R^k{}_K\overset{-1}{R}{}^K{}_l=\delta^k{}_l,\ \overset{-1}{\boldsymbol{R}}{}^K{}_k R^k{}_L=\delta^K{}_L$$

故$\overset{-1}{\boldsymbol{R}}$代表逆转动，即由$\boldsymbol{n}_\alpha$到$\boldsymbol{N}_\alpha$的转动．设$\boldsymbol{N}^\alpha$和$\boldsymbol{n}^\alpha$分别

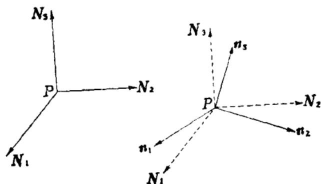


图 1.7.1 主轴的转动

是三轴组 $\boldsymbol{N}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{n}_\alpha$ 的逆矢量，即它们满足

$$(1.7.3) \qquad N^\alpha_K N^L_\alpha = \delta^L_K, \quad n^\alpha_k n^l_\alpha = \delta^l_k$$

以 N^α_L 乘(1.7.1)$_1$，以 $n^\alpha{}_L$ 乘(1.7.1)$_2$，得

$$(1.7.4) \qquad R^k_K = n^k{}_\alpha N^\alpha{}_K, \quad \overset{-1}{R}{}^K{}_k = N^K{}_\alpha n^\alpha{}_k$$

利用升标和降标还可求得

$$(1.7.5) \qquad R^k{}_K = \overset{-1}{R}{}^k{}_K$$

特殊情况 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$ 称为纯应变。

引理 1 科西和格林变形张量各幂彼此之间的关系是

$$(1.7.6) \qquad \overset{-n}{C}{}^K{}_L = \overset{-1}{R}{}^K{}_k \overset{n}{c}{}^k{}_l R^l{}_L, \quad \overset{-n}{c}{}^k{}_k = R^k{}_K \overset{n}{C}{}^K{}_L \overset{-1}{R}{}^L{}_l$$

为证明 (1.7.6)$_1$，我们记得 $C^K{}_L$ 是非奇异矩阵。另外，这个矩阵任何正幂、负幂或分数幂的特征数就是 $C^K{}_L$ 的特征数的同一幂，即

$$(1.7.7)\qquad \overset{-n}{C}{}^K_L N^L_\alpha = (C_\alpha)^{-n} N^K_\alpha$$

由此解出

$$(1.7.8)\qquad \overset{-n}{C}{}^K_L = \sum_\alpha (C_\alpha)^{-n} N^K_\alpha N^\alpha_L$$

同样，对 $\mathbf{c}$ 的幂我们有

$$(1.7.9)\qquad \overset{-n}{c}{}^k_l = \sum_\alpha (c_\alpha)^{-n} n^K_\alpha n^\alpha_l$$

以(1.7.1)中的 $\boldsymbol{N}_\alpha$ 代入(1.7.8)，并按照(1.6.18)写成 $C_\alpha = 1/c_\alpha$，得

$$\overset{-n}{C}{}^K_L = \sum_\alpha \overset{-1}{R}{}^K_k (c_\alpha)^n n^k_\alpha n^\alpha_l R^l_L = \overset{-1}{R}{}^K_k \overset{n}{c}{}^k_l R^l_L$$

上式最后一步利用了$(1.7.3)_1$和(1.7.9)．类似地可由(1.7.9)证明$(1.7.6)_2$．

引理 2 变形梯度以及柯西和格林变形张量彼此之间的关系是

$$(1.7.10)\qquad x^k{}_{,K} = R^k{}_L \overset{\frac{1}{2}}{C}{}^L{}_K = R^l{}_K \overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^k{}_l$$

$$(1.7.11)\qquad X^K{}_{,k} = \overset{-1}{R}{}^K{}_l \overset{\frac{1}{2}}{c}{}^l{}_k = \overset{-1}{R}{}^L{}_k \overset{-\frac{1}{2}}{C}{}^K{}_L$$

为证明(1.7.10)，由(1.6.22)解出$x^k{}_{,K}$：

$$(1.7.12)\qquad x^k{}_{,K} = \sum_\alpha (C_\alpha)^{\frac{1}{2}} N^\alpha{}_K n^k{}_\alpha$$

以(1.7.1)中的 n^k_α 代入(1.7.12)并利用(1.7.8)，其中取 $n=$

$-\frac{1}{2}$，得

$$x^k{}_{,K}=\sum_\alpha (C_\alpha)^{\frac{1}{2}} N_K^\alpha R_L^k N_\alpha^L = \overset{\frac{1}{2}}{C}{}_K^L R_L^k$$

从而证明了(1.7.10)$_1$。由此利用(1.7.6)$_1$取其中 $n=-\frac{1}{2}$可导得(1.7.10)$_2$。(1.7.11)的证明类此。

表达式(1.7.10) 和 (1.7.11)称为极分解定理。在矩阵记号中，任何可逆的线性变换 $\boldsymbol{F}$ 有两种乘法分解：

$$(1.7.13)\qquad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{RU}=\boldsymbol{VR}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是正交矩阵，而 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是对称正定矩阵。以下关系式成立：

$$(1.7.14)\qquad \boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$$

$$(1.7.15)\qquad \boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T,\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{R}^T$$

设 $\boldsymbol{F}$ 由 $x^k{}_{,K}$确定，即 $F^k_K=x^k{}_{,K}$，于是 $\boldsymbol{R}$ 是转动张量 $\boldsymbol{R}^k{}_K$，而 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 被确定为 $U^K{}_L=\overset{-\frac{1}{2}}{C}{}^K_L, V^k{}_l=\overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^k_l$。于是由(1.7.14)得

$$(1.7.16)\qquad (\boldsymbol{U}^2)^K{}_L=\overset{-1}{C}{}^K{}_L,\quad (\boldsymbol{V}^2)^k{}_l=\overset{-1}{c}{}^k{}_l=b^k{}_l.$$

有时 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别称为右伸缩张量和左伸缩张量，$\boldsymbol{C}$ 称为右科西格林张量，$\boldsymbol{b}$称为左科西格林张量(参见 Truedell 和 Noll, 1965, 24 节)。

由(1.7.10)和(1.7.11)我们还有

$$(1.7.17)\qquad R^k{}_K = x^k{}_{,L}\overset{-\frac{1}{2}}{C}{}^L{}_K,\quad \overset{-1}{R}{}^K{}_k = X^K{}_{,l}\overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^l{}_k$$

作为这个引理的推论，我们可以证明

$$(1.7.18)\qquad U_{K;M} = R^L{}_K\overset{\frac{1}{2}}{C}{}_{LM} - G_{KM}$$

其中

$$(1.7.19)\qquad R^K{}_L \equiv g^K{}_k R^k{}_L$$

为此由(1.3.31)中解出 $U_{K;M}$ 即

$$(1.7.20)\qquad U_{K;M} = g_{kM}x^k{}_{,K} - G_{MK}$$

用(1.7.10)代入此式，即得(1.7.18). 从这表达式我们导得 $\widetilde{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\boldsymbol{R}}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 之间的关系：

$$(1.7.21)\qquad \widetilde{E}_{KM} = R_{(M}{}^L\overset{\frac{1}{2}}{C}{}_{K)L} - G_{MK},$$

$$\widetilde{R}_{KM} = R_{[M}{}^L\overset{\frac{1}{2}}{C}{}_{K]L}.①$$

另一个有意思的结果是

$$(1.7.22)\qquad R_{KM} = (G_{KL} + \widetilde{E}_{KL} + \widetilde{R}_{KL})\overset{-\frac{1}{2}}{C}{}^L{}_M,$$

其证明由在(1.7.17)中用$(1.3.31)_1$代入并考虑(1.7.19)结果得出. 以上各公式在欧拉表示法中的对偶结果不难导得.

设变形梯度不大，在(1.7.22)中只保留到最低阶项，得

① 译注 下标中圆括弧表示对称化，方括号表示交错，见本丛书第一分册40，41页. 本分册(1.3.34)式中用过这种符号.

$$(1.7.23)\qquad R_{KM}-G_{KM}\simeq \widetilde{R}R_{KM},$$
$$\widetilde{R}_{KM}\simeq g_K{}^k g_M{}^m \widetilde{r}_{km}$$

因而证实对$\widetilde{R}_{KM}$和$\widetilde{r}_{km}$采用"无限小转动"这名词是合理的．

现在我们已作好准备来证明1.5节中表明的转动基本定理(定理3)．

定理　一点处任何线元的变形可认为是一个刚性平移、应变主轴组的一个刚性转动，以及沿各主轴的伸缩三者的结果．平移、转动和伸缩可以任何次序施加．①

为证明这定理，考虑P处矢量dX^K．这一矢量变形后成为$dx^k=x^k{}_{,K}dX^K$．用(1.7.10)写出

$$(1.7.24)\qquad dx^k=g^k{}_L R^L{}_M \overset{\frac{1}{2}}{C}{}^M{}_K dX^K=\overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^k{}_l R^l{}_m g^m{}_K dX^K$$

其中

$$(1.7.25)\qquad R^l{}_m\equiv R^l{}_K g^K{}_m$$

方程(1.7.24)可分解如下(图1.7.2)：

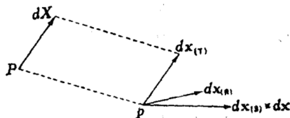


图 1.7.2　变 形 的 分 解

(a) 矢量dX^K作刚性平移，以平行位移动成为$dx^k{}_{(T)}$：

① 原注　关于这定理的历史资料可见 *Eringen* (1962，10节，39页脚注)，

(1.7.26 a) $\qquad dx^k_{(T)} = g^k_K dX^K$

(b) 矢量 $dx^k_{(T)}$ 刚性地转动成为 $dx^k_{(R)}$：

(1.7.26 b) $\qquad dx^k_{(R)} = R^k{}_l dx^l{}_{(T)}$

(c) 矢量 $dx^k_{(R)}$ 伸缩成为$dx^k_{(S)} \equiv dx^k$：

(1.7.26 c) $\qquad dx^k = \overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^k{}_l dx^l_{(R)}$

以(1.7.26 a) 和 (1.7.26 b) 相继代入 (1.7.26 c) 即得，(1.7.24)$_2$，定理得证.

注意，当且仅当 dX^K 是 C_{KL}的一个特征矢量时，在伸缩中不再涉及 $dx^k_{(R)}$ 的进一步转动. 显然，平移、转动和伸缩这三个运算的次序无关紧要，但是它们的张量量度则与运算施加的次序有关.

总起来说，P的无限小邻域的变形可认为是这样发生的：中心在P的一个无限小球刚性平移到 p，P处的应变主轴也平行地移到 p 处；接着球作刚性转动，直到平移来的刚性三轴组与p处应变椭球面主轴相重合；最后，球的所有直径受到伸缩，但只有沿 p 处主轴方向的那些直径不作进一步的转动（又见图 1.5.3）.

1.8 面积和体积的变化

在未变形体 B 中，曲面可用它的高斯形式表示（参见第一分册，3.2节）：

(1.8.1) $\qquad X^K = X^K(U,V)$

其中 U 和 V 是两参数．面积元 dA^{KL} 是一个二重矢量，由

$$(1.8.2)\qquad dA^{KL}=2\frac{\partial X^{[K}}{\partial U}\frac{\partial X^{L]}}{\partial V}dUdV$$

给出（第一分册，3.8节）．曲面(1.8.1)在变形后成为曲面

$$(1.8.3)\qquad x^k=x^k[X^K(U,V)]$$

其面积元为

$$\begin{aligned}da^{kl}&=2\frac{\partial x^{[k}}{\partial U}\frac{\partial x^{l]}}{\partial V}dUdV\\&=2x^{[k},_K x,_L^{l]}\frac{\partial X^K}{\partial U}\frac{\partial X^L}{\partial V}dUdV\\&=2x^k,_K x^l,_L\frac{\partial X^{[K}}{\partial U}\frac{\partial X^{L]}}{\partial V}dUdV\end{aligned}$$

或

$$(1.8.4)\qquad da^{kl}=x^k,_K x^l,_L dA^{KL}$$

相当于二重矢量 dA^{KL} 和 da^{kl}，有轴矢量 dA_K 和 da_k，由
(1.8.5)

$$dA_K=\frac{1}{2}\varepsilon_{KLM}dA^{LM},\quad dA^{KL}=\varepsilon^{KLM}dA_M$$

$$da_k=\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}da^{lm},\quad da^{kl}=\varepsilon^{klm}da_m$$

确定①．将(1.8.4)代入(1.8.5)$_3$，得

---

① 译注　对任意二重矢量可引进对偶的矢量，见本丛书第一分册52页(1.9.21)式．

$$da_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}x^l{}_{,L}x^m{}_{,M}dA^{LM} = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\varepsilon^{KLM}x^l{}_{,L}x^m{}_{,M}dA_K$$

利用(1.3.7)上式给出

$$da_k = JX^K{}_{,k}dA_K \tag{1.8.6}$$

于是变形后弧元的平方是

$$(da)^2 = g^{kl}da_k da_l = J^2 g^{kl}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}dA_K dA_L$$

回顾(1.3.19)，上式可写成为

$$(da)^2 = III_C \overset{-1}{C}{}^{KL}dA_K dA_L \tag{1.8.7}$$

其中已采用

$$III_C = J^2 \tag{1.8.8}$$

因为按矩阵积的行列式和(1.3.8)有

$$\begin{aligned} III_C &= \det C^K_L = \det\ (G^{KM}g_{kl}x^k{}_{,M}x^l{}_{,L}) \\ &= (\det G^{KM})(\det g_{kl})(\det x^k{}_{,M})^2 \\ &= (g/G)j = J^2 \end{aligned}$$

表达式(1.8.7)类似于弧长平方的表达式

$$(ds)^2 = C^{KL}dX_K dX_L$$

因而在量度面积的变化时张量 $III_C\overset{-1}{C}{}^{KL}$ 所起作用和张量 C^{KL} 对长度变化所起的作用相同.

对偶于结果(1.8.6)和(1.8.7)的是以下结果：

$$\begin{aligned} dA_K &= J^{-1}x^k{}_{,K}da_k, \\ (dA)^2 &= III_c \overset{-1}{c}{}^{kl}da_k da_l \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

上述长度和面积之间的对偶性使人想到，可根据张量 $III_C\overset{-1}{C}{}^{KL}$ 和 $III_c\overset{-1}{c}{}^{kl}$ 作出椭球面，并研究这些椭球面以了解 P 和 p 处各不同方位上面积变化．显然，有了这种对应，1.5和1.6节所证明的各定理在这里都有对偶的结果．例如，照(1.6.18)，在 c^k_l 取极小（极大）值的主轴方向，C^K_L 达到它的极大(极小)值．因而，最大(最小)的面积变化发生在垂直于极大(极小)伸缩比方向的平面上．其实，如伸缩比编序为 $\lambda_3\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1$，则主面积的编序为 $\lambda_2\lambda_3\leqslant\lambda_3\lambda_1\leqslant\lambda_1\lambda_2$．

体积的变化由 $dv=JdV$ 计算得到．由于(1.8.8)和(1.6.23)以及(1.6.24)和(1.6.26)，有

$$
(1.8.10)\qquad dv/dV=J=(III_C)^{\frac{1}{2}}=1/(III_c)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
=(1+2I_E+4II_E+8III_E)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
=(1-2I_e+4II_e-8III_e)^{-\frac{1}{2}}
$$

对无限小变形的情况，利用二项式展开得

$$
(1.8.11)\qquad (dv-dV)/dV\approx I_{\tilde{E}}\approx I_{\tilde{e}}
$$

在这情况中，拉格朗日应变和欧拉应变之间的差别消失了．在线性理论中，$I_{\tilde{e}}$ 有时称为膨胀率(*dilatation*)．由(1.8.10)可见，只有在线性理论中体积的变化才由膨胀率给出．

1.9 协调条件

在三维空间中变形张量 C_{KL} 有六个分量，它们可用位移矢量三个分量 U_K 表达出来：

$$(1.9.1)\qquad C_{KL}=G_{KL}+U_{K;L}+U_{L;K}+G^{MN}U_{M;K}U_{N;L}$$

如位移矢量具有连续一阶偏导数，则代入（1.9.1）后可决定应变张量的六个分量．反过来，如果已知六个函数 C_{KL} 并要求它们成为一个变形张量，就引起一个问题：是否存在一个单值连续位移场对应于这些 C_{KL}．在后一种情况必须求解六个偏微分方程(1.9.1）以确定 U_K．显然用六个方程（1.9.1）以确定三个未知量 U_K 构造一个超定方程组，它可能没有这样一个解，除非某些可积性条件能满足．这些条件是含 C_{KL} 而不是含 U_K 的偏微分方程的形式求得的．它们称为协调条件．违背这些条件时，物体中相应的位移场不是唯一的．于是物体可能具有位错(*dislocation*)．

寻求协调条件的一个办法是在六个方程（1.9.1）中通过偏微分法消去 U_K．对非线性理论这是冗长的．另一个办法是利用黎曼的一个定理，即：对称张量 a_{kl} 要成为一个欧氏空间的度量张量，其必要且充分条件是，a_{kl} 是非奇导正定张量，且由它组成的黎曼-克里斯托非张量 $K_{nm\,lk}^{(a)}$ 恒等于零，黎-克张量① 为：

$$(1.9.2)\qquad K_{nmlk}^{(a)}\equiv\frac{1}{2}(a_{km,ln}+a_{ln,km}-a_{lm,kn}-a_{kn,lm})+\overset{-1}{a^{rs}}([l_{n,s}][k_{m,r}]-[l_{m,s}][k_{n,r}]$$

① 译注　黎曼-克里斯托非张量即曲率张量，参见本丛书第一分册，123页起，特别是125页定理1．

其中

(1.9.3)
$$[kl,m]\equiv\frac{1}{2}(a_{km,l}+a_{lm,k}-a_{kl,m})$$

$$\overset{-1}{a}{}^{kr}a_{rl}=a^{kr}\overset{-1}{a}_{rl}=\delta^k_l$$

张量 C_{KL} 和 c_{kl} 都是非奇异对称正定张量，当它们已知时可以计算出 B 和 b 中的弧长，而 B 和 b 都是欧氏空间的一部分。所以，必须有

(1.9.4) $$K^{(C)}_{KLMN}=0,\quad K^{(c)}_{klmn}=0$$

上式中前式用 C_{KL} 作为度量张量a_{kl}，且对 X^K作偏微分，而后式用 c_{kl} 作为度量张量并对 x^k 作偏微分.

在三维空间中，K_{klmn}的81个分量中，只有六个是代数上独立且非零的. 此外，张量 $\boldsymbol{K}$ 满足好几个对称性条件，它满足彭启(*Bianchi*)恒等式(参见第一分册，2.9节)：

(1.9.5) $$\nabla_{[r}K_{nm]l}{}^{k}=0$$

其中 ∇_r 表示协变偏微分运算. 于是，(1.9.4)第一式给出 C_{KL} 协调条件的六个二阶偏微分方程，而第二式给出 c_{kl} 的相应方程. 由于

(1.9.6) $$C_{KL}=G_{KL}+2E_{KL},\quad c_{kl}=g_{kl}-2e_{kl}$$

以此代替(1.9.4)中的 $\boldsymbol{C}$ 和$\mathbf{c}$，得 E_{KL} 和 e_{kl}的协调条件. 我们给出其中一个，

(1.9.7)
$$e_{km;ln}+e_{ln;km}-e_{lm;kn}-e_{kn;lm}+\overset{-1}{c}{}^{rs}\{[lm,s]_g[kn,r]_g$$

$$
\begin{aligned}
&-[ln,s]_g[km,r]_g+2[km,r]_g[ln,s]_e\\
&+2[km,r]_e[ln,s]_g-4[ln,s]_e[km,r]_e\\
&-2[kn,r]_g[lm,s]_e-2[kn,r]_e[lm,s]_g\\
&+4[lm,s]_e[kn,r]_e\}-g^{rs}[ln,s]_g[km,r]_g\\
&+g^{rs}[lm,s]_g[kn,r]_g=0
\end{aligned}
$$

如将(1.9.2)和(1.9.3)式的偏微分运算(式中用逗号表示)改为协变偏微分运算(用分号表示)，所得张量 $\boldsymbol{K}^{(a)}$ 仍然是一个四阶的张量，且在欧氏空间任何直角坐标中和(1.9.2)式所给出的 $\boldsymbol{K}^{(a)}$ 相重合．于是协调条件(1.9.7)也可表达为

(1.9.8)

$$
\begin{aligned}
&e_{km;ln}+e_{ln;km}-e_{lm;kn}-e_{kn;lm}+\overset{-1}{c}{}^{rs}[(e_{ms;l}\\
&\quad+e_{ls;m}-e_{lm;s})(e_{kr;n}+e_{nr;k}-e_{kn;r})\\
&\quad-(e_{ls;n}+e_{ns;l}-e_{ln;s})(e_{kr;m}+e_{mr;k}\\
&\quad-e_{km;r})]=0
\end{aligned}
$$

其中协变偏微分运算是根据 g_{kl} 作出的。

协调条件还有其他形式．例如，用李奇(*Ricci*)张量和爱因斯坦(*Einstein*)张量表示，这两个张量的定义分别为①

$$
K_{ml}\equiv\overset{-1}{c}{}^{kn}K_{nm\cdot k}^{(c)}\qquad(1.9.9)
$$

$$
G_{lk}=K_{lk}-\frac{1}{2}Kc_{kl}\qquad(1.9.10)
$$

其中

① 译注　第一分册，128页．

(1.9.11) $$K \equiv \overset{-1}{c}{}^{kl} K_{kl}$$

不难证明协调条件等价于下面表达式中的任一个(参见 Fosdick,1966):

(1.9.12) $$K_{ml} = 0$$

(1.9.13) $$G_{lk} = 0$$

显然如 $\boldsymbol{K}^{(c)}$ 等于零,则 K_{ml} 和 G_{lk} 都等于零. 反过来,可以证明如 K_{ml} 或 G_{lk} 等于零, 则 $\boldsymbol{K}^{(c)}$ 也等于零. 为此反演(1.9.10), 有

(1.9.14) $$K^{(c)}_{nmlk} = \varepsilon^{(c)}_{nml}\varepsilon^{(c)}_{iks} G^{rs}$$

其中

(1.9.15) $$\varepsilon^{(c)}_{nmr} \equiv e_{nmr} \det(c^k_i)^{\frac{1}{2}}$$

可见 G^{rs} 等于零意味着$\boldsymbol{K}^{(c)}$为零.

形式(1.9.12)和(1.9.13)清楚地表明, 独立的协调条件只有六个. 我们还知道,由于彭启恒等式,爱因斯坦张量满足方程

(1.9.16) $$G^m_{l;m} = 0$$

协调条件的其他形式参见*Fosdick*的工作(1966).

在无限小应变情形中, 我们丢掉 e_{kl} 所有的乘积项, 于是得无限小应变张量的协调条件

(1.9.17) $$\tilde{e}_{km;ln} + \tilde{e}_{ln;km} - \tilde{e}_{lm;kn} - \tilde{e}_{kn;lm} = 0$$

这些条件满足时, 则

(1.9.18) $$\widetilde{e}_{kl}=u_{(k;l)}$$

的单值积分存在，且由

(1.9.19) $$u_k=u_k^0+\widetilde{R}_{lk}p^l+b_k$$

给出，其中 u_L^0 是(1.9.17)任何一个解，$\widetilde{R}_k$ 是一反对称张量且满足 $\widetilde{R}_{lk,m}=0$，而 p^l 和 b_k 是满足 $p^l{}_{,k}=\delta_k^l$，$b_{k,l}=0$ 任意两个矢量．在物理上(1.9.19)表明，对应于 $\widetilde{e}_{kl}$ 的位移场是单值的，且唯一地确定到含有一个任意的无限小刚性运动．

1.10 运动学 张量的时率

定义 1 矢量 $\boldsymbol{f}$（或张量）的物质时率定义为

(1.10.1) $$d\boldsymbol{f}/dt\equiv\partial\boldsymbol{f}/\partial t|_{\boldsymbol{X}}$$

其中一竖以后的下标 $\boldsymbol{X}$ 表示微分时 $\boldsymbol{X}$ 保持不变．如 $\boldsymbol{f}$ 是物质坐标的函数，例如

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},t)=F^K(\boldsymbol{X},t)\boldsymbol{G}_K$$

则显然

$$d\boldsymbol{f}/dt=(\partial F^K/\partial t)\boldsymbol{G}_K$$

如 $\boldsymbol{f}$ 是空间坐标的函数，例如

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=f^k(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{g}_k$$

则

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}=\left(\frac{\partial f^k}{\partial t}\bigg|_{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial f^k}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial t}\right)\boldsymbol{g}_k+\boldsymbol{f}^k\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial t}$$

因为$\boldsymbol{g}_k=\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})$，且在运动中有

$$(1.10.2)\qquad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$$

如果记起（见第一分册，2.5 节）

$$(1.10.3)\qquad \partial\boldsymbol{g}_k/\partial x^l=\left\{\begin{matrix}m\\k\ l\end{matrix}\right\}\boldsymbol{g}_m,$$

$$\partial\boldsymbol{g}^k/\partial x^l=-\left\{\begin{matrix}k\\l\ m\end{matrix}\right\}\boldsymbol{g}^m$$

其中$\left\{\begin{smallmatrix}m\\k\ l\end{smallmatrix}\right\}$是第二种克里斯托菲符号，则得

$$(1.10.4)\qquad d\boldsymbol{f}/dt\equiv\dot{\boldsymbol{f}}=(Df^k/Dt)\boldsymbol{g}_k=\dot{f}^k\boldsymbol{g}_k$$

其中

$$(1.10.5)\qquad Df^k/Dt=\dot{f}^k=(\partial f^k/\partial t)+f^k{}_{;l}\partial x^l/\partial t$$

称为f^k的**物质导数**(*material derivative*①)．(1.10.5)右端第一项称为**局部率或非驻定率**(*local or nonstationary rate*)，第二项是**牵连时率**(*convective time rate*)．显然，表达式(1.10.4)和(1.10.5)不含糊地同样适用于物质矢量和张量，因为

$$DF^K(\boldsymbol{X},t)/Dt=\dot{F}^K=\partial F^K/\partial t$$

设$\boldsymbol{f}$是张量，则进行微分后，求得

$$(1.10.6)\qquad Df^{kl}/Dt\equiv\dot{f}^{kl}=(\partial f^{kl}/\partial t)+f^{kl}{}_{;m}\partial x^m/\partial t$$

① 译注　见第一分册 111 页，那里译为实质导数。

对其他类型张量也有相似的表达式成立.

物质导数服从有和与积时偏微分法的通常规则，即

$$\frac{D}{Dt}(f^k+g^k)=\frac{Df^k}{Dt}+\frac{Dg^k}{Dt},$$

$$\frac{D}{Dt}(f^k g_l)=\frac{Df^k}{Dt}gl+f^k\frac{\partial g_l}{\partial t}$$

有关这问题的说明参见第一分册，2.7 节.

定义 2 速度矢量是位置矢量的时率：

(1.10.7) $$\boldsymbol{V}\equiv\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{\partial x^k(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\boldsymbol{g}_k$$

以$(1.10.2)_2$代入(1.10.7)，有

(1.10.8) $$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)t)$$
$$\equiv\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)=v^k(\boldsymbol{X},t)\boldsymbol{g}_k$$

显然$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t)$是物质点$\boldsymbol{X}$的速度，但是分量为$v^k(\boldsymbol{x},t)$的速度$\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)$是时刻$t$在空间点$\boldsymbol{x}$处的速度，它并不指示出属于哪一个物质点. 这是经典流体力学中广泛采用的欧拉观点.

定义 3 加速度矢量$\boldsymbol{a}$是速度矢量的物质时率：

(1.10.9) $$\boldsymbol{a}\equiv d\boldsymbol{v}/dt$$

按照(1.10.4)和(1.10.5)我们有

(1.10.10) $$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t)=(Dv^k/Dt)\boldsymbol{g}_k,$$
$$a^k\equiv Dv^k/Dt=(\partial v^k/\partial t)+v;^k{}_l v^l$$

在拉格朗日观点看来，物质点是已知的，所以

(1.10.11) $$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X},t)=[\partial V^K(\boldsymbol{X},t)/\partial t]\boldsymbol{G}_K$$

在连续统的运动学中，位移梯度的物质导数起重要的作用.

基本引理　位移梯度的物质导数由下式给出：

$$\frac{D}{Dt}(x^k{}_{,K}) = v^k{}_{;l}x^l{}_{;K}, \tag{1.10.12}$$

$$\frac{D}{Dt}(dx^k) = v^k{}_{;l}dx^l$$

证明　为证明引理先取 $d\boldsymbol{p}$ 的物质导数，并注意在用算子 d/dt 时 X^K 就象常量一样，有

$$\dot{\overline{d\boldsymbol{p}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial X^K}dX^K\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{p}}}{\partial X^K}dX^K$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial X^K}dX^K = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^l}x^l{}_{,K}dX^K = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^l}dx^l$$

另方面

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}(v^m\boldsymbol{g}_m) = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^l} + \left\{{k \atop l\,m}\right\}v^m\right)\boldsymbol{g}_k = v^k{}_{;l}\boldsymbol{g}_k$$

以此代入前式得

$$\dot{\overline{d\boldsymbol{p}}} = v^k{}_{;l}dx^l\boldsymbol{g}_k \tag{1.10.13}$$

它的分量形式与(1.10.12)₂相同. 在(1.10.12)₂中用 $dx^k = x^k{}_{;K}dX^K$ 代入即得(1.10.12)₁.

这引理的一个推论是

$$\frac{D}{Dt}(X^K{}_{,k}) = -v^l{}_{;k}X^K{}_{,l} \tag{1.10.14}$$

这可由对 $x^l{}_{,K}X^K{}_{,k} = \delta^l_k$ 进行微分求得，即

$$\frac{D}{Dt}(x^l{}_{,K}X^K{}_{,k})=\frac{D(x^l{}_{,K})}{Dt}X^K{}_{,k}+x^l{}_{,K}\frac{D}{Dt}(X^K{}_{,k})=0$$

以 $X^L{}_{,l}$ 乘此式并用(1.3.6)和$(1.10.12)_1$即得(1.10.14)。以上结果可用来证明下面一些重要定理。

定理 1 弧长平方的物质导数由

$$\frac{D}{Dt}(ds)^2=2d_{kl}dx^kdx^l \tag{1.10.15}$$

给出，其中

$$d_{kl}\equiv v_{(k;l)}\equiv\frac{1}{2}(v_{k;l}+v_{l;k}) \tag{1.10.16}$$

称为变形率张量。

证明　先对

$$(ds)^2=g_{kl}dx^kdx^l$$

取物质导数，并用$(1.10.12)_2$，并注意照李奇定理

$$Dg_{kl}/Dt=0$$

本定理即得证明。

在拉格朗日描述中，(1.10.15)可写为

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}(ds^2)&=2d_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{;L}dX^KdX^L\\&=\dot{C}_{KL}dX^KdX^L=2\dot{E}_{KL}dX^KdX^L\end{aligned} \tag{1.10.17}$$

其中

$$\dot{E}_{KL}=\frac{1}{2}\dot{C}_{KL}=d_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L} \tag{1.10.18}$$

是拉格朗日应变张量的物质时率。由(1.10.15)和(1.10.18)

有以下定理.

定理 2〔基林(*Killing*)〕　运动为局部刚性的必要且充分条件是 $d_{kl}=0$(或$\dot{E}_{KL}=0$,或$\dot{C}_{KL}=0$).

引理　雅可比行列式的物质导数等于

$$DJ/Dt = Jv^k{}_{;k} \tag{1.10.19}$$

证明　对 J 作微分运算并利用(1.10.12)$_1$,有

$$\frac{DJ}{Dt}=\frac{D}{Dt}\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{1}{2}}}j\right)\frac{g^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial j}{\partial x^k{}_{,K}}\frac{Dx^k{}_{,K}}{Dt}$$

$$=\frac{g^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial j}{\partial x^k{}_{,K}}v^k{}_{;l}v^l{}_{;K}$$

考虑到(1.3.10)上式即给出(1.10.19).

定理 3　面积元的物质导数等于

$$\frac{D}{Dt}(da_k)=v^l{}_{;l}da_k-v^l{}_{;k}da_l \tag{1.10.20}$$

证明　为此计算由(1.8.6)所给 da_k 的物质导数,即

$$\frac{D}{Dt}(da_k)=\frac{D}{Dt}(JX^K{}_{,k}dA_K)$$

$$=\left[\frac{DJ}{Dt}X^K{}_{,k}+J\frac{D}{Dt}(X^K{}_{,k})\right]dA_K$$

利用(1.10.19)和(1.10.4)即得到(1.10.20).

定理 4　体积元的物质导数等于

$$D(dv)/Dt=v^k{}_{;k}dv=I_d dv \tag{1.10.21}$$

其中 $I_d\equiv v^k{}_{;k}$ 是变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 的第一不变量.

将 $dv=JdV$ 求导数并利用(1.10.19)即可证(1.10.21)。

应变量度的更高阶物质时率在连续统物理某些分支(例如,粘弹性)中有用．它们由对 ds^2 重复微分得到．例如,ds^2 的 M 阶物质导数是

$$(1.10.22)\qquad \frac{D^M}{Dt^M}(ds)^2=A^{(M)}_{kl}dx^kdx^l$$

其中 $A^{(M)}_{kl}$ 称为M阶的里夫林-爱里克森(*Rivlin-Ericksen*)张量.对 $A^{(M)}_{kl}$ 得到一个递归关系式如下:

$$\frac{D^{M+1}}{Dt^{M+1}}(ds^2)=\frac{D}{Dt}\left[\frac{D^M(ds^2)}{Dt^M}\right]=\frac{D}{Dt}\left[A^{(M)}_{kl}dx^kdx^l\right]$$

$$=\frac{D}{Dt}[A^{(M)}_{kl}]dx^kdx^l+A^{(M)}_{kl}\frac{D(dx^k)}{Dt}dx^l$$

$$+A^{(M)}_{kl}dx^k\frac{D(dx^l)}{Dt}$$

利用$(1.10.12)_2$和(1.10.22)得

(1.10.23)

$$A^{(M+1)}_{kl}=[DA^{(M)}_{kl}/Dt]+A^{(M)}_{km}v^m{}_{;l}+A^{(M)}_{lm}v^m{}_{;k},\quad M\geqslant 1$$

$$A^{(1)}_{kl}\equiv 2d_{kl}=v_{k;l}+v_{l;k}$$

求得 $\boldsymbol{A}^{(M)}$的显式如下:

$$\frac{D^M(ds^2)}{dt^M}=\frac{D^M}{Dt^M}(g_{kl}dx^kd_k{}^l)$$

$$=g_{kl}\sum_{K=0}^{M}\binom{M}{K}\frac{D^{M-K}}{Dt^{M-K}}(dx^k)\frac{D^K}{Dt^K}(dx^l)$$

其中$\binom{M}{K}$是二项式系数

$$\binom{M}{K} \equiv \frac{M!}{(M-K)!K!}$$

如同(1.10.12)$_2$，可以证明

(1.10.24)
$$D^M(dx^k)/Dt^M = v^{(M)k}{}_{;l}dx^l,$$
$$v^{(M)k} \equiv D^M x^k / Dt^M$$

用此及(1.10.22)，求得

(1.10.25)

$$A^{(M)}_{kl} = v^{(M)}_{k;l} + v^{(M)}_{l;k} + \sum_{K=1}^{M-1}\binom{M}{K} v^{(M-K)}_{m;k} v^{(K)m}_{;l}, \quad M \geqslant 1$$

但因

$$\frac{D^M(ds^2)}{Dt^M} = \frac{D^M}{Dt^M}(C_{KL}dX^K dX^L) = C^{(M)}_{KL} dX^K dX^L$$

我们还有

(1.10.26) $A^{(M)}_{kl} = C^{(M)}{}_{KL} X^K{}_{,k} X^L{}_{,l}, \qquad M \geqslant 0$

所以，设 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},0) = \boldsymbol{X}$，则

(1.10.27) $$\boldsymbol{A}^{(M)} = \boldsymbol{C}^{(M)}|_{t=0}$$

对刚性运动，ds^2 保持不变，故 $\boldsymbol{A}^{(M)}$ 等于零。

1.11 变形率 自旋 涡量

变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 已经介绍过．现引进自旋张量 $\boldsymbol{w}$：

(1.11.1) $$d_{kl} \equiv v_{(k;l)} \equiv \frac{1}{2}(v_{k;l} + v_{l;k})$$

(1.11.2) $$w_{kl}\equiv v_{[k;l]}=\frac{1}{2}(v_{k;l}-v_{l;k})$$

上两式相加得

(1.11.3) $$v_{k;l}=d_{kl}+w_{kl}$$

变形率张量 d_{kl} 是对称张量，而自旋张量是一反对称张量，即

$$d_{kl}=d_{lk},\quad w_{kl}=-w_{lk}$$

于是可以用一个轴矢量来代替 w_{kl}：①

(1.11.4) $$w^k=\varepsilon^{klm}w_{ml}=\varepsilon^{klm}v_{m;l},\quad \boldsymbol{w}=\text{curl}\,\boldsymbol{v}$$

矢量 w^k 称为涡矢量.

为说明这两个张量的物理意义，研究物质长度和夹角的时间变率. 为此引进一个物理记号——在单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向的伸缩率(*stretching*)②，它是

(1.11.5) $$d(\boldsymbol{n})=\frac{1}{ds}\frac{D(ds)}{Dt}=d_{kl}n^kn^l;\quad n^k\equiv\frac{dx^k}{ds}$$

这表明变形率张量的法向分量就是伸缩率. 例如，设 $\boldsymbol{n}$ 沿直角坐标中 x 轴方向，即 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，则 $d_{(1)}=d_{(11)}$.

为理解 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 各混合分量的物理意义，需要 p 处两单位矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 之间夹角的变率：

(1.11.6)

$$\frac{D}{Dt}\cos\theta(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)=\frac{D}{Dt}\left(g_{kl}\frac{dx_1{}^k}{ds_1}\frac{dx_2{}^l}{ds_2}\right)$$

---

① 译注 见第20页译注.

② 译注这里的伸缩率(*stretching*)是一种时间变率，不同于1.4节中的伸缩比(*stretch*)，也不同于1.4节中的伸长率(*extension*).

$$= \frac{1}{ds_1 ds_2} \frac{D}{Dt} (g_{kl} dx_1^k dx_2^l)$$
$$- [d_{(\mathbf{n}_1)} + d_{(\mathbf{n}_2)}] \cos \theta_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)}$$

其中 ds_1 和 ds_2 分别是 $d\boldsymbol{x}_1$ 和 $d\boldsymbol{x}_2$ 的长度，而 $d_{(\mathbf{n}_1)}$ 和 $d_{(\mathbf{n}_2)}$ 是 $d\boldsymbol{x}_1$ 和 $d\boldsymbol{x}_2$ 的伸缩率．利用(1.10.11)$_2$ 有

$$(1.11.7) \qquad \frac{D}{Dt}(g_{kl} dx_1^k dx_1^l) = 2d_{kl} dx_1^k dx_2^l$$

以此代入(1.11.6)得

$$(1.11.8) \qquad -\sin \theta_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)} \dot{\theta}_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)} = 2d_{kl} n_1^k n_2^l - [d_{(\mathbf{n}_1)} + d_{(\mathbf{n}_2)}] \cos\theta_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)}$$

设 $\theta_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)} = 0$，则上式给出(1.11.5)。设 $\theta_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)} \neq 0$，则上式给 $d\boldsymbol{x}_1$ 和 $d\boldsymbol{x}_2$ 方向的剪切率 $\dot{\theta}_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)}$。设 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别沿直角坐标轴 x 和 y，在这特殊情况中得

$$(1.11.9) \qquad -\dot{\theta}_{(12)} = 2d_{12}$$

它说明 d_{12} 是 x 和 y 方向剪切率①(*shearing*)的一半．于是下面的定理得证．

定理 1　变形率张量的法向分量是伸缩率；而混合分量是直角坐标中剪切率之半．

为说明自旋张量的物理意义，我们需要求出物质元 $d\boldsymbol{x}$ 对一固定方向 $\boldsymbol{v}$ 的转动率如下：

$$(1.11.10) \qquad \frac{D}{Dt}(\cos\phi) \equiv \frac{D}{Dt}\cos(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$$

---

① 译注　伸缩率、剪切率都是时间变率，原作者另一书(1962)中称 *rate of stretch*, *rte of shear*，在本书中他改称 *stretching*, *shearing*.

$$= \frac{D}{Dt}\left(g_{kl}\frac{dx^k}{ds}v^l\right)$$

或

(1.11.11) $$-\sin\phi\,\dot{\phi} = v_{l;k}n^k v^l - d_{(\mathbf{n})}\cos\phi$$

当$\phi = \pi/2$，上式给出

(1.11.12) $$-\dot{\phi} = v_{l;k}n^k v^l$$

设 v 取为沿直角坐标的 x 轴方向而 $\boldsymbol{n}$ 沿 y 轴方向，则 y 向 x 的转动率是

$$-\dot{\phi}_{12} = v_{1,2}$$

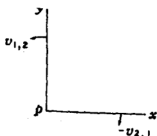


图 1.11.1 自旋分量

可见，$v_{1,2}$是沿 y 轴方向的物质元朝 x 轴方向作逆时针向转动的速率(图1.11.1)。在x和y方向的剪切率是这些① 的和，因为 x 轴和 y 轴是彼此相背转动的，即

$$-\dot{\theta}_{(12)} \equiv -\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{21} = 2d_{12}$$

沿 y 轴的元对 x 轴的相对转动率是

$$\dot{\phi}_{21} - \dot{\phi}_{12} = v_{1,2} - v_{2,1} = 2w_{12} = -w_3$$

它是 x 轴和 y 轴相对自旋(逆时针向)之差的一半，或者是沿 y 轴涡量分量的负值。

按照基林定理，刚性运动的必要且充条分件是 $d_{kl} = 0$。

① 译注 指$v_{1,2}$ 和 $v_{2,1}$。

如果在物体一区域内它都成立，我们可得通解

$$v_k = \widetilde{\omega}_{kl} p^l + \widetilde{b}_k \tag{1.11.13}$$

其中 $\widetilde{b}_k$ 和 $\widetilde{\omega}_{kl}$ 仅是 t 的函数，$\widetilde{\omega}_{kl}$ 是转动率张量，而 $\omega^k = \varepsilon^{klm}\widetilde{\omega}_{ml}$ 是关于 p^l 原点的角速度矢量。由 (1.11.2) 对刚性运动可见 $w_{kl} = \widetilde{\omega}_{kl}$。所以在刚性运动中自旋张量等于转动率张量。

定理 2 自旋是变形率张量主轴的角速度。

证明 张量 d_{kl} 的主方向 $\boldsymbol{n}_\alpha$ 可以象对应变张量一样求得。方向 $\boldsymbol{n}_\alpha$ 是方程组

$$(d^k_{\ l} - d\delta^k_l) n^l = 0 \tag{1.11.14}$$

的解。主伸缩率 d_α 是特征方程

$$\det (d^k_{\ l} - d\delta^k_l) = 0 \tag{1.11.15}$$

的根。

计算单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的变率：

$$\dot{n}^k = \frac{D}{Dt}\left(\frac{dx^k}{ds}\right) = \frac{1}{ds}\frac{D}{Dt}(dx^k) - \frac{1}{(ds)^2}\frac{D(ds)}{Dt}dx^k$$

利用(1.10.12)$_2$和(1.11.5)得

$$\dot{n}^k = (d^k_{\ l} + w^k_{\ l} - d(n)\delta^k_l) n^l \tag{1.11.16}$$

当 $\boldsymbol{n}$ 是一个主方向，(1.11.14)成立，上式简化为

$$\dot{n}^k_\alpha = w^k_{\ l} n^l_\alpha \tag{1.11.17}$$

这当然就是定理的证明.

1.12 应变率和转动率

定理 1 拉格朗日应变和欧拉应变的变率分别为

(1.12.1) $$\dot{E}_{KL}=\frac{1}{2}\dot{C}_{KL}=d_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}$$

(1.12.2) $$\dot{e}_{kl}=-\frac{1}{2}\dot{c}_{kl}=d_{kl}-e_{mk}v^m{}_{,l}-e_{ml}v^m{}_{;k}$$
$$=\frac{1}{2}(c_{mk}v^m{}_{;l}+c_{ml}v^m{}_{;k})$$

证明 为证明(1.12.1)计算 C_{KL} 的物质导数:

$$\dot{C}_{KL}=2\dot{E}_{kl}=\frac{D}{Dt}(g_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L})$$
$$=g_{kl}\left[\frac{Dx^k{}_{,K}}{Dt}x^l{}_{,L}+x^k{}_{,K}\frac{Dx^l{}_{,L}}{Dt}\right]$$

利用$(1.10.12)_1$上式给出(1.12.1).

为证明(1.12.2)取 e_{kl} 的物质导数:

$$\dot{e}_{kl}=\frac{D}{Dt}(E_{KL}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l})=\dot{E}_{KL}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}$$
$$+E_{KL}\frac{DX^K{}_{,k}}{Dt}X^L{}_{,l}+E_{KL}X^K{}_{,k}\frac{DX^L{}_{,l}}{Dt}$$

利用(1.12.1)和(1.10.14)后即得(1.12.2).

从(1.12.1)和(1.12.2)可见,这两个应变率一般说来和变形率不相同. 如果在时刻 $t=0$ 介质是无应变的,且 $X^K=\delta^K_k x^k$,则有

(1.12.3) $$\dot{E}_{KL}(\boldsymbol{X},0)=d_{kl}\delta^k_K\delta^l_L,\quad \dot{e}_{kl}(\boldsymbol{x},0)=d_{kl}$$

对无限小变形拉格朗日应变率① 近似地等于变形率，即

$$(1.12.4) \qquad \dot{E}_{KL} \simeq d_{kl}\delta^k_K\delta^l_L$$

但要欧拉应变率等于变形率，即 $\dot{e}_{kl} \simeq d_{kl}$，还得有附加的限制：自旋张量 w_{kl} 的数量级不大于变形率张量的量级，因为 $v_{m;l} = d_{ml} + w_{ml}$。

从 (1.12.1) 和 (1.12.2) 可以明白，在无限小刚性运动中，拉格朗日应变率等于零而欧拉应变率则不是。在刚性运动中 $ds^2 - dS^2 = 2e_{kl}dx^k dx^l$ 保持常量，而 e_{kl} 的各个分量一般地有变化。于是在随同物质点一起运动的观察者看来，当空间点走过时空间坐标系好象在转动。

还可得出另一个说明变形率意义的结果如下（*Eringen* 1962，22 节）：按照 (1.6.13)，c_{kl} 的特征数 c_α 等于

$$(1.12.5) \qquad c_\alpha = c_{kl} n^k_\alpha n^l_\alpha$$

它的物质导数是

$$\dot{c}_\alpha = \dot{c}_{kl} n^k_\alpha n^l_\alpha + c_{kl}(\dot{n}^k_\alpha n^l_\alpha + n^k_\alpha \dot{n}^l_\alpha)$$

上式在用(1.12.2)和(1.11.17)后给出

$$(1.12.6) \qquad \dot{c}_\alpha = -2c^m_k d_{ml} n^k_\alpha n^l_\alpha$$

如用(1.6.12)的另一形式即

$$c^m_k n^k_\alpha = c_\alpha n^m_\alpha$$

代入(1.12.6)并记起 $c_\alpha = 1/\lambda^2_\alpha$，即得漂亮的公式

① 译注　原文误为拉格朗日和欧拉应变率。

(1.12.7) $\quad -\dot{c}_\alpha/2c_\alpha=\dot{\lambda}_\alpha/\lambda_\alpha=d_{kl}n^k_\alpha n^l_\alpha=d_\alpha$

这说明任一主伸缩比对数的物质导数等于该主方向的法向伸缩率。

现求柯西变形矩阵的 m 次幂的物质导数，为此微分

$$\overset{m}{c}{}^k_l=\sum_\alpha (c_\alpha)^m n^k_\alpha n_{\alpha l}$$

即

$$\frac{D}{Dt}(\overset{m}{c}{}^k{}_l)=\sum_\alpha [m(c_\alpha)^{m-1}\dot{c}_\alpha n^k_\alpha n_{\alpha l}+(c_\alpha)^m(\dot{n}^k_\alpha n_{\alpha l}+n^k_\alpha \dot{n}_l)]$$

将 $\dot{c}_\alpha$ 和 $\dot{n}^k_\alpha$ 用(1.12.6)和(1.11.17)代入，上式给出①

(1.12.8)

$$\frac{D}{Dt}(\overset{m}{c}{}^k_l)=\overset{m}{c}{}^r_l w^k_r-\overset{m}{c}{}^k_r w^r_l-2m c^p_r d_{ps}\sum_\alpha (c_\alpha)^{m-1}n^r_\alpha n^s_\alpha n^k_\alpha n_{\alpha l}$$

上式对分数 m 成立。

对(1.7.17)$_2$作微分以计算 $\boldsymbol{R}$ 的物质导数，

$$\frac{D}{Dt}\left(\overset{-1}{R}{}^K_k\right)=\frac{DX^K{}_{,l}}{Dt}\overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^l_k+X^K{}_{,l}\frac{D}{Dt}\left(\overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^l_k\right)$$

利用(1.10.14)和(1.12.8)并令 $m=-\frac{1}{2}$，得

① 原注 这个表达式是 *Eringen* (1962, 22 节) 头一个推导出的。但是，那里最后一项〔(22.14)式〕有错，因而影响了 $\overset{-1}{R}{}^K{}_k$ 变率的结果〔(22.15)式〕。

(1.12.9)

$$\frac{D}{Dt}\left(\overset{-1}{R}{}^{K}_{k}\right)=\frac{D}{Dt}\left(R^{K}_{k}\right)=-X^{K}{}_{,l}\left[d^{l}_{r}\overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^{r}_{k}+\overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^{l}_{r}w^{r}_{k}\right.$$
$$\left.-c^{p}_{r}d_{ps}\sum_{\alpha}(c_{\alpha})^{-\frac{3}{2}}n^{r}_{\alpha}n^{s}_{\alpha}n^{l}_{\alpha}n_{\alpha k}\right]$$

设在时刻 $t=0$, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$, 于是 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{I}$ 且 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{I}$. 以 $x^{m}{}_{,K}$ 乘(1.12.9),改写 $x^{m}{}_{,K}$ 为 g^{m}_{K}, $\mathbf{c}=\boldsymbol{I}$, 且 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{I}$, (1.12.9)给出

(1.12.10)
$$\frac{D}{Dt}(R_{km})\Big|_{t=0}=w_{km}$$

其中利用了(1.7.26). 再在 $t=0$ 时计算(1.12.8),可以类似地得①

(1.12.11)
$$\frac{D}{Dt}(\overset{m}{c}{}^{k}{}_{l})\Big|_{t=0}=-2md^{k}{}_{l}$$

这些结果说明,在 $t=0$ 时转动 $\boldsymbol{R}$ 的变率和 $\overset{\frac{1}{2}}{\mathbf{c}}$ 的变率分别等于 $t=0$ 时的自旋和变形率.

同样,相对应变量度 $c_{(t)}(\tau)$ 和 $b_{(t)}(\tau)$ 可以利用它们的表达式(1.3.51)和(1.3.52)求得. 例如,

(1.12.12)
$$\overset{(n)}{\mathbf{c}}_{(t)}(\tau)=\sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}\boldsymbol{F}^{T(i)}_{(t)}(\tau)\boldsymbol{F}^{(n-i)}_{(t)}(\tau)$$

当 $t=\tau$, 上式就给出以前已得出的(1.10.25).

---

① 原注 (1.12.10)和(1.12.11)对 $m=-\frac{1}{2}$ 的结果曾由 *Noll* (1955, 20节)用另一种方法得到. 但是一般的结果(1.12.8)和(1.12.9)是 *Eringen* (1962, 22节)得出的.

1.13 物质流形和空间流形

定义 1 路程线是时间变化时物质点 $\boldsymbol{X}$ 所经历的曲线。于是

$$x^k = x^k(\boldsymbol{X}, t), \quad \boldsymbol{X} \text{ 固定} \tag{1.13.1}$$

是物质点 $\boldsymbol{X}$ 的路程线的方程。另外，在时刻 $t=0$ 经过 X 的方程组

$$dx^k = v^k dt \tag{1.13.2}$$

的积分曲线也给出路程线。

定义 2 物质流形是物质点的集合。例如，B 中的物质曲线由 S 变化时，由

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(S) \tag{1.13.3}$$

所定义。在时刻 t 这一物质曲线的位形由

$$\hat{\boldsymbol{x}}(S,t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}(S), t) \tag{1.13.4}$$

给出。物质曲面由

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(U,V) \text{ 或 } F(\boldsymbol{X}) = 0 \tag{1.13.5}$$

所定义，式中 U,V 是参量。这曲面在时刻 t 的位形由

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}(U,V),t), F[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)] = 0 \tag{1.13.6}$$

给出。物质体积是由物质点组成的区域。

定理 1（拉格朗日判据） 曲面 $f(\boldsymbol{x},t)=0$ 成为物质曲面的必要且充分条件是

$$(1.13.7)\qquad \dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}+f_{,k}v^{k}=0$$

证明　设$f(\boldsymbol{x},t)$是一物质曲面．曲面上有一典型点在运动，其速度是$\boldsymbol{v}$，这个$\boldsymbol{v}$不一定就在瞬间占据曲面上该点的物质点的速度$\dot{\boldsymbol{x}}$．这个曲面上点的速度$\boldsymbol{v}$可由(1.13.7)求得，它在$f=0$的外法线上的法向分量$v_{(\mathbf{n})}$是

$$(1.13.8)\qquad v_{(\mathbf{n})}=\frac{v^{k}f_{,k}}{(g^{lm}f_{,l}f_{,m})^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\partial f/\partial t}{(g^{lm}f_{,l}f_{,m})^{\frac{1}{2}}}$$

速度的法向分量$\dot{x}_{(\mathbf{n})}$由

$$(1.13.9)\qquad \dot{x}_{(\mathbf{n})}=\dot{x}^{k}f_{,k}/(g^{lm}f_{,l}f_{,m})^{\frac{1}{2}}$$

给出．以(1.13.8)中的$\partial f/\partial t$和(1.13.9)中的$\dot{x}^{k}f_{,k}$代入$\dot{f}$的表达式(1.13.7)，得

$$(1.13.10)\qquad \dot{f}=(\dot{x}_{(\mathbf{n})}-v_{(\mathbf{n})})(g^{kl}f_{,k}f_{,l})^{\frac{1}{2}}$$

这说明，在曲面$f=0$的一点$\boldsymbol{x}$处，$\dot{f}$与瞬间位于$\boldsymbol{x}$的物质点相对于曲面的法向速率成正比．如果曲面包含同样那些物质点，则必须有$\dot{\boldsymbol{x}}_{(\mathbf{n})}=v_{(\mathbf{n})}$，所以$\dot{f}=0$．故条件是必要的．还要证明条件也是充分的，即如果$\dot{f}=0$则曲面含有同样的物质点．方程(1.13.7)是一阶微分方程，其特征方程是

$$(1.13.11)\qquad dt=dx^{1}/v^{1}=dx^{2}/v^{2}=dx^{3}/v^{3}$$

它们是物质点路程线的微分方程，其积分形式为

$$(1.13.12)\qquad x^{k}=x^{k}(X^{k},t)$$

其中 X^K 是识别初始时刻 $t=0$ 各物质点的三个任意积分常量．方程组(1.13.7)的通解于是由

$$f=\psi(X^1,X^2,X^3)$$

给出，其中 ψ 是一任意函数．这证明，只要当 $\dot{f}=0$，在 $f=0$ 上的物质点在运动中始终在这个曲面上．

我们注意到，刚性边界曲面 $f=0$ 也满足(1.13.7)．

定理 2 ［亥姆霍兹-佐拉夫斯基(*Helmholtz-Zorawski*)判据］ 与矢量场 $\boldsymbol{q}$ 相切的曲线成为物质线的必要且充分条件是

$$(1.13.13)\qquad q^{[k}\dot{q}^{l]}-q^{[k}v^{l]}{}_{;m}q^m=0$$

$$\text{或}\quad \boldsymbol{q}\times[\partial\boldsymbol{q}/\partial t+\operatorname{curl}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{q}]=\boldsymbol{0}$$

证明 在时刻 t 设曲线 c 和矢量场 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)$ 相切．在 t 前后的一间隔内内，设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(S,t')$ 是在时刻 t 与 c 相重合的那条物质线 $\mathscr{C}'$．因为它是物质线，故有

$$(1.13.14)\qquad \frac{D}{Dt}\left(q^{[k}\frac{\partial x^{l]}}{\partial S}\right)=\dot{q}^{[k}\frac{\partial x^{l]}}{\partial S}+q^{[k}\dot{x}^{l]}{}_{;m}\frac{\partial x^m}{\partial S}$$

若 $\mathscr{C}'$ 保持为 $\boldsymbol{q}$ 的一矢量线，则(1.13.14)必须为零，即

$$(1.13.15)\qquad \frac{D}{Dt}\left(q^{k}\frac{\partial x^{l}}{\partial S}\right)=0$$

因 $\mathscr{C}'$ 是在 t 时 $\boldsymbol{q}$ 的矢量线，必须有

$$(1.13.16)\qquad \partial x^l/\partial S=aq^l$$

在时刻 t 成立，式中 a 是一标量．将(1.13.14)到(1.13.16)

联合起来，可以看出，如果(1.13.13) 满足，则 $\boldsymbol{q}$ 原来的矢量线$\mathscr{C}'$将仍然是矢量线.

为证明条件 (1.13.13) 的充分性我们注意到，如果它成立，则量 $q^{[k}\partial x^{l]}/\partial S$ 开始时是零，它在 $\boldsymbol{X}$ 保持不变对时间的导数也等于零.

在(1.13.13)中取 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$，得

(1.13.17) $\boldsymbol{v}\times\partial\boldsymbol{v}/\partial t=0,\quad \partial\boldsymbol{v}/\partial t=K(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}$

当 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t=0$ 运动称为定常运动. 有时也把定常运动的概念推广到(1.13.17)$_2$那样的形式.

定义 3 在 t 时的流线是和矢量场各矢量相切的曲线. 因此

(1.13.18)

$$\boldsymbol{v}=k\,d\boldsymbol{p}\ \text{或}\ dx^1/v^1=dx^2/v^2=dx^3/v^3=1/k$$

的积分曲线是流线.

定义 4 经过空间点 $\boldsymbol{x}$ 在 t 时的条纹线 (*streakline*) 是当 t' 变化时

(1.13.19) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t'),t]$

的轨迹. 为了得到条纹线，可在运动 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ 中对固定的 t 令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t')$. 在时刻 t 的空间点 $\boldsymbol{x}$ 处，占据 $\boldsymbol{x}$ 的物质点的路程线、流线以及经过 $\boldsymbol{x}$ 的条纹线三者具有相同的切线. 当运动是定常的时，三类线相重合. 但是，对非定常运动来说，它们一般是不相同的.

在实验上，设在流体中投下单个颗粒，对这颗粒作长时间的曝光就可摄得颗粒的路程线. 如在流体内同时刻投下许

多小颗粒并作短时间的曝光，就能显示出含有这些可见粒子的速度场的方向。把这些切线想象地连结起来，即得流线。在一个地方对流体连续地投入颗粒并作瞬间的曝光，就显示出该时该地的条纹线的一小段。

定义 5 流片以及流管分别是和一个不封闭以及封闭的曲线相交的所有流线的集合。因为物质点沿速度场方向运动，它们不可能穿过流片或流管。

同样，对与空间点有关的在 t 时的矢量场画相切的曲线，还可以定义其他的物质线。例如，涡线是和涡旋场 $\boldsymbol{w}$ 相切的曲线。

我们以下面的定理结束本节。

定理 3 当且仅当运动在(1.13.17)意义下为定常时，流线和路程线相重合。由亥姆霍兹-佐拉夫斯基判据的结果(1.13.13)即得到证明。

1.14 线积分、面积分和体积分的运动学

引理 1 任何场 ϕ 在物质线 $\mathscr{C}$ 上的线积分的物质导数的计算式是

$$(1.14.1) \qquad \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{C}}\phi dx^k = \int_{\mathscr{C}}(\dot{\phi}dx^k + \phi v^k{}_{;l}dx^l)$$

证明 物质线 $\mathscr{C}$ 的方程是 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(S)$。所以(1.14.1)式左端积分在物质描述法中具有固定的积分限。于是运算子 D/Dt 和积分符号可交换，即

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{C}}\phi dx^k = \int_{\mathscr{C}}\left[\dot{\phi}dx^k + \phi\frac{D}{Dt}(dx^k)\right]$$

利用(1.10.12)$_2$即得(1.14.1)。对于在固定的空间曲线 c 上

的积分，与(1.14.1)相对应的式子是

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c}\phi dx^{k}=\int_{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}dx^{k} \tag{1.14.2}$$

它和(1.14.1)的差别是由$\mathscr{C}$的物质点的运动引起的。

引理 2 任意场在物质曲面 $\mathscr{S}$ 上的面积分的物质导数由下式给出：

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{S}}\phi da_{k}=\int_{\mathscr{S}}[\dot{\phi}da_{k}+\phi(-v^{l}{}_{;k}da_{l}+v^{l}{}_{;l}da_{k})] \tag{1.14.3}$$

把 D/Dt 搬进积分内(因为在物质描述法中$\mathscr{S}$是固定的)，再用(1.10.20)即得证明。

对于固定的空间曲面 s，(1.14.3)的相应式子是

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{s}\phi da_{k}=\int_{s}\frac{\partial\phi}{\partial t}dx_{k} \tag{1.14.4}$$

如在(1.14.3)中把 ϕ 选为矢量场 $\boldsymbol{q}$，则它成为

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{C}}q^{k}da_{k}=\int_{\mathscr{C}}(\dot{q}^{k}-q^{l}v^{k}{}_{;l}+q^{k}v^{l}{}_{;l})da_{k}=\int_{\mathscr{C}}[\partial\boldsymbol{q}/\partial t)+\text{curl}\,(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\,\text{div}\,\boldsymbol{q}]\cdot d\boldsymbol{a} \tag{1.14.5}$$

由此得以下结果。

佐拉夫斯基① 判据 要使矢量 $\boldsymbol{q}$ 穿过每一个物质曲面的通量保持常量，其必要且充分条件是

① 译注 *Zorawski*，原文误为 *Zorowski*。

$$(1.14.6)\quad (\partial \boldsymbol{q}/\partial t)+\operatorname{curl}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{q}=0$$

设闭曲线 $c(t)$ 以速度 $\mathbf{u}$ 运动，形成以 $c(t)$ 为界的空间曲面 $s(t)$，那么对 $s(t)$ 说，(1.14.5)的结果也成立，即

$$(1.14.7)\quad \frac{D}{Dt}\int_{s(t)}\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{a}=\int_{s(t)}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\operatorname{curl}(\boldsymbol{q}\times\mathbf{u})+\mathbf{u}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\Big]\cdot d\boldsymbol{a}$$

设想 $s(t)+c(t)$ 含有某些假想的物质点，其速度为 $\boldsymbol{v}$，于是就可了解上式. 利用斯托克斯定理（第一分册 3.9 节），将(1.14.7)① 式右端第二项改变为线积分，得

$$(1.14.8)\quad \frac{D}{Dt}\int_{s(t)}\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{a}=\int_{s(t)}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\Big)\cdot d\boldsymbol{a}+\int_{c(t)}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{q}$$

引理 3　任意场在物质体积上的积分② 的物质导数由下式给出：

$$(1.14.9)\quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}}\phi dv=\int_{\mathscr{V}}(\dot{\phi}+\phi v^{k}{}_{;k})dv=\int_{\mathscr{V}}\Big[\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\phi v^{k})_{;k}\Big]dv$$

证明时仍然是将 D/Dt 拿进积分号(因为在物质体积 $\mathscr{V}$ 中，积分限是固定的)并利用(1.10.21). 利用格林-高斯定理(第一分册 3.9 节)，可以把(1.14.9)式中最右部分变成面积分，因

① 译注　原文是(2.5.7).

② 译注　原文脱漏"的积分".

而写成

(1.14.10)

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}}\phi dv=\int_{\mathscr{V}}\frac{\partial\phi}{\partial t}dv+\int_{\mathscr{S}}\phi e^{k}da_{k}$$

如果选择$\mathscr{V}$和$\mathscr{S}$使它们在瞬间重合于空间体和v和它的表面s，则(1.14.10)也可写为

$$(1.14.11)\quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}}\phi dv=\int_{v}\frac{\partial\phi}{\partial t}dv+\int_{s}\phi v^{k}da_{k}$$

它说明，在物质体积$\mathscr{V}$中总ϕ的变率等于瞬时与$\mathscr{V}$重合的固定空间体积v中ϕ的创生率，加上ϕv^{k}经过v界面s的通量。

采用相同于推导(1.14.8)所用论点，可以把(1.14.11)推广到任意空间体积$v(t)$，其界面$s(t)$以速度$\boldsymbol{u}$作运动，即

$$(1.14.12)\quad \frac{D}{Dt}\int_{v(t)}\phi dv=\int_{v(t)}\frac{\partial\phi}{\partial t}dv+\int_{s(t)}\phi\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{a}$$

现来推广结果(1.14.15)和(1.14.10)，使其应用到包含动间断线和面的物质面和体。在连续统物理中，常会遇到横扫物质流形的间断性，例如激波和加速度波。先考虑物质体积$\mathscr{V}$的情形，设它与速度为$\boldsymbol{u}$的动间断面$\sigma(t)$相交(图1.14.1)。把(1.14.11)用于两个体积$\mathscr{V}^{+}$和$\mathscr{V}^{-}$，这两体积的边界分别为$\mathscr{S}^{+}+\sigma^{+}$和$\mathscr{S}^{-}+\sigma^{-}$，则

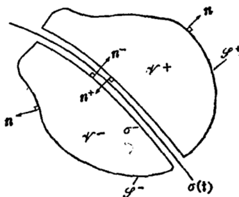


图 1.14.1 间断面

写成

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}^+}\phi dv = \int_{\mathscr{V}^+}\frac{\partial\phi}{\partial t}dv + \int_{\mathscr{S}^+}\phi \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a} - \int_{\sigma^+}\phi \mathsf{u}\cdot d\boldsymbol{a}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}^-}\phi dv = \int_{\mathscr{V}^-}\frac{\partial\phi}{\partial t}dv + \int_{\mathscr{S}^-}\phi \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a} + \int_{\sigma^-}\phi \mathsf{u}\cdot d\boldsymbol{a}$$

两式相加，并令 σ^+ 和 σ^- 趋于 σ，得①

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}-\sigma}\phi dv = \int_{\mathscr{V}-\sigma}\frac{\partial\phi}{\partial t}dv + \int_{\mathscr{S}-\sigma}\phi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} - \int_{\sigma}[\phi\mathsf{u}]\cdot d\boldsymbol{a}$$

由格林-高斯定理上式右端第二个积分可变为体积分，于是

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}-\sigma}\phi dv = \int_{\mathscr{V}-\sigma}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi\boldsymbol{v})\right]dv + \int_{\sigma}[\phi(\boldsymbol{v}-\mathsf{u})]\cdot d\boldsymbol{a} \tag{1.14.13}$$

式中黑体括号代表括号内的量过 $\sigma(t)$ 时的跳跃量，即

$$[A] = A^+ - A^-$$

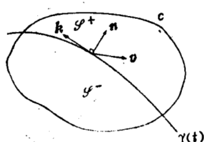


图 1.14.2 间断线

其中 A^+ 和 A^- 是 A 在 σ 上的值，当分别从 σ 法线 $\boldsymbol{n}$ 的正向和负向趋向 σ 时。

可以采用类似的论点把 (1.14.8) 推广到含有间断线 γ 的曲面 $\mathscr{S}$，γ 在 $\mathscr{S}$ 上的速

① 原注 式中 $\mathscr{V}-\sigma$ 和 $\mathscr{S}-\sigma$ 分别表示除去在 σ 上的那些点后的物质体积和表面。

度为 $\boldsymbol{v}$. 将(1.14.8)用于曲面$\mathscr{S}^+$和$\mathscr{S}^-$，并用斯托克斯定理变换$\mathscr{C}-\gamma$上的线积分，并假设$\mathscr{S}$的法向 $\boldsymbol{n}$ 是连续的（图1.14.2)，得到

$$(1.14.14)\quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{S}-\gamma}\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{a}=\int_{\mathscr{S}-\gamma}\left[\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial t}+\operatorname{curl}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\right]\cdot d\boldsymbol{a}+\int_{\gamma(t)}[\boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})]\cdot\boldsymbol{K}ds$$

(1.14.13) 这一结果在连续统力学中有重要的用处，而(1.14.14) 则在电磁理论中有用．其实上连续统物理的平衡定律有两种类型：

$$(1.14.15)\quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{S}-\gamma}\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{a}=\oint_{\mathscr{C}-\gamma}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{s}+\int_{\mathscr{S}-\gamma}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{a}$$

$$(1.14.16)\quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}-\sigma}\phi dv=\oint_{\mathscr{S}-\sigma}\tau\cdot d\boldsymbol{a}+\int_{\mathscr{V}-\sigma}g dv$$

其中 $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 通常是矢量场，而 ϕ, τ 和 g 是张量场．

平衡方程(1.14.15)说明，经过开曲面$\mathscr{S}-\gamma$的 $\boldsymbol{q}$ 总通量的时率等于 $\boldsymbol{h}$ 沿$\mathscr{S}-\gamma$的边界$\mathscr{C}-\gamma$的环量，以及出现在$\mathscr{S}-\gamma$上源 $\boldsymbol{r}$ 的总量两者之和．

平衡方程(1.14.16)说明，在$\mathscr{V}-\sigma$中 ϕ 总量的时间变率为表面通量 τ 和体积源 g 所平衡．

这些场的性质依赖于 $\boldsymbol{q}$ 和 ϕ 的选择．

由(1.14.14)(1.14.13)并分别利用斯托克斯和格林-高斯定理，可以把(1.14.15)和(1.14.16)变成为如下的有用形式：

(1.14.17) $$\int_{\mathscr{S}-\gamma}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\operatorname{curl}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{q}-\operatorname{curl}\boldsymbol{h}-\boldsymbol{r}\Big]\cdot d\boldsymbol{a}+\int_{\gamma(t)}[\![\boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{v}-\mathrm{U})-\boldsymbol{h}]\!]\cdot\boldsymbol{K}ds=0$$

(1.14.18) $$\int_{\mathscr{V}-\sigma}\Big[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{v})-\operatorname{div}\mathrm{T}-g\Big]dv+\int_{\sigma(t)}[\![\phi(\boldsymbol{v}-\mathrm{U})-\mathrm{T}]\!]\cdot\boldsymbol{n}da=0$$

定义　矢量场 $\boldsymbol{q}$ 沿曲线 c 切向分量的线积分称为 $\boldsymbol{q}$ 的环量①. 于是

(1.14.19) $$\Gamma(\mathbf{q})=\oint_c q_k dx^k$$

设 $\boldsymbol{q}$ 是力场则 $\Gamma(\mathbf{q})$ 是力沿 c 所作的功；设 $\boldsymbol{q}$ 是速度场，$\Gamma(\mathbf{q})$ 就是原来意义的环量. 当 $\boldsymbol{q}$ 是定常流矢量(1.14.19)给出沿 c 建立起的势.

用斯托克斯定理(1.14.19)可以写为

(1.14.20) $$\Gamma(\mathbf{q})=\int_s(\operatorname{curl}\boldsymbol{q})\cdot d\boldsymbol{a}$$

其中 s 是以 c 为界的任意曲面. 这可叙述为：$\boldsymbol{q}$ **沿闭合回路的环量等于** curl $\boldsymbol{q}$ **经过以回路为界的任何曲面的通量**.（图

① 原注　"环量"这词通常只用于速度场，这里作了推广.

1.14.3）当 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$，$\operatorname{curl}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{w}$ 是涡矢量，这定理称为斯托克斯定理。

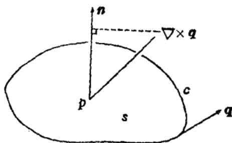


图 1.14.3 环 量

矢量场 $\boldsymbol{q}$ 称为是层状的（*lamellar*）如果它可从某一势导出，即

(1.14.21) $\quad \boldsymbol{q}=-\nabla\phi$

对于层状场，我们有

$$(1.14.22)\qquad \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} q_k dx^k=-\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}\phi_{,k}dx^k$$

$$=\phi(\boldsymbol{x}_1)-\phi(\boldsymbol{x}_2)$$

如曲线 c 是闭的，$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$，则上式等于零。由(1.14.20)还可得到

$$(1.14.23)\qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{q}=0$$

因为可以任选 c，而 s 是以 c 为界的曲面。于是显见，(1.14.11)意味着(1.14.23)，反之亦然。

满足(1.14.23)的矢量场称为无旋的。这名词来源于这样的事实，即当 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$ 时 $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$；因而有

定理 1（开耳芬） 运动是无旋的当且仅当关于每一可约回路的环量是零。

多连通区域在引进合适的障碍曲线（*barriers*）后可成为单连通的。在形成回路时各障碍曲线不得相交。有这样的说明后，对多连通区域(1.14.22)修改为

(1.14.24)

$$-\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} v_k dx^k = \phi(\boldsymbol{x}_2) - \phi(\boldsymbol{x}_1) + \sum_{k=1}^{r} n_k C_k$$

其中 r 是障碍线的条数，n_k 是整数，C_k 称为运动的循环常量(*cyclic constant*)。

在无旋运动中，我们有

(1.14.25) $$I_d = v^k{}_{;k} = -\nabla\phi^k{}_{;k} = -\nabla^2\phi$$

所以，无旋运动是等容的①(*isochoric*)当且仅当

(1.14.26) $$\nabla^2\phi = 0$$

(1.14.20)的物质导数为

(1.14.27)

$$\frac{D\Gamma_{(\mathbf{q})}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{S}}(\nabla\times\boldsymbol{q})\cdot d\boldsymbol{a} = \int_{\mathscr{S}}\left\{\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{q})}{\partial t} + \operatorname{curl}[\nabla\times\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{v}]\right\}\cdot d\boldsymbol{a},$$

其中我们应用了(1.14.5)、把其中 $\boldsymbol{q}$ 换成 $\nabla\times\boldsymbol{q}$。因而，$D\Gamma_{(\mathbf{q})}/Dt = 0$ 对每一物质面 $\mathscr{S}$ 成立的必要且充分条件是

(1.14.28) $$\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{q})}{\partial t} + \operatorname{curl}[(\nabla\times\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{v}] = 0$$

当 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$，$\nabla\times\boldsymbol{q}=\boldsymbol{w}$，则上式简化为

(1.14.29) $$\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{v}} = 0$$

① 译注　等容指运动或变形时微元体积大小不变；由(1.10.21)等容运动中变形率张量的第一不变量 I_d 等于零。不可压缩流体是等容的。

因而我们证明了以下定理.

定理 2　运动中环量守恒的必要且充分条件是加速度有势.

以下是有关涡旋运动的三个定理.

亥姆霍兹第一定理　在涡管一个截面处的总涡量与该涡管任何其他截面处的总涡量相同.

应用格林-高斯定理，我们有

$$(1.14.30)\quad \int_v \operatorname{div}\operatorname{curl}\boldsymbol{q}\,dv=\int_s \operatorname{curl}\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{a}$$

但上式左端等于零因为 $\operatorname{div}\operatorname{curl}\boldsymbol{q}=0$. 根据定义涡管与 $\operatorname{curl}\boldsymbol{q}$ 相切，因而在管的表面(图1.14.4)上有

(1.14.31)

$$\int_{S_1}(\operatorname{curl}\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{n}_1 da=\int_{S_2}(\operatorname{curl}\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{n}_2 da$$

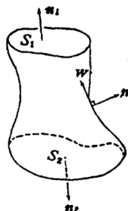


图 1.14.4　涡管

其中 s_1 和 s_2 是管的两个截面，其外单位法线分别为 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$。当 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$ 时 $\operatorname{curl}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{w}$，管成为一涡管，于是(1.14.31)的普遍结果在这种情形中给出亥姆霍兹第一定理的证明. 从这个结果可以得到结论，与 $\operatorname{curl}\boldsymbol{q}$ 相切的曲线(在 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$ 的情形中就是涡线)不可能在任何内部点终止. 它必定或者是闭合的，或者在边界上开始且在边界上终止. 注意这结果对任意矢量成立. 例如，当 $\boldsymbol{q}$ 是与磁场相切的曲线(磁场线)时，同样的结果成立.

亥姆霍兹第二定理　环量守恒的运动中，涡线就是物

质线.

对环量守恒的矢量场我们有(1.14.28)，即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{q})+\operatorname{curl}[(\nabla \times \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{v}]=0 \tag{1.14.32}$$

但根据亥霍姆兹-佐拉夫斯基判据(1.13.13)这表明和 $\nabla\times\boldsymbol{q}$ 相切的曲线是物质线，因为在(1.13.12)中如将 $\boldsymbol{q}$ 换成 $\nabla\times\boldsymbol{q}$ 即得(1.14.32). 当 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$ 时 $\nabla\times\boldsymbol{q}=\boldsymbol{w}$，其结果即亥姆霍兹第二定理的证明.

亥姆霍兹第三定理 如果运动中涡线与物质线相重合，要使所有涡管的强度保持常量，其必要且充分条件是运动中环量守恒.

证明直接来自亥姆霍兹-佐拉夫斯基判据$(1.13.13)_2$，其中 $\boldsymbol{q}$ 用 $\nabla\times\boldsymbol{q}$ 代替. 这就给出(1.14.32). 当它被满足时则由(1.14.27)可得 $D\Gamma_{(\mathbf{q})}/Dt=0$. 当 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$ 时我们求得 $\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{v}}=0$.

由这些定理可见，环量守恒的运动和其他运动是有明显差别的，普通的运动在哪些方面和环量守恒运动不一样，这种问题在经典流体力学中广泛地研究过. 有关这些其他的定理读者可参考兰姆(*Lamb*)的著作(1945，第八章)以及*Truesdell* 和 *Toupin*(1960，*IIe* 节).

第二章 平衡定律

2.1 本章的范围

本章涉及平衡① 定律和熵不等式的讨论．在 2.2 节中我们把四个全局平衡定律和全局熵不等式(热力学第二定律)列为公设．在 2.3 节中引进局部面通量和体源的概念，并得到各全局定律的主平衡方程(对熵说是一个不等式)．对于面通量自然引起了应力张量、热量矢量和熵通量矢量的概念，而对于体源则有体力、热源和熵源．在 2.4 节中导出在横扫物体的任何间断面上的局部平衡定律、熵不等式和有关的跳跃条件．对这些定律既给出空间形式,也给出物质形式．2.5节用二次曲面简单讨论一点处的应力状态，并引进应力不变量．有些物质(材料)的反应依赖于应力的变率，研究这种物质时重要的是应力通量，这在 2.6 节讨论．

对于非简单物质(例如，极化介质，非局部理论)，必须把面通量(应力、热量、熵等)的概念推广以包括其他局部或非局部的量度，但是这章所建立的思想对于这种推广是必不可少的．其实对这类更普遍的理论说,全局定律仍然成立,详见第三卷② 的讨论．

---

① 译注 *balance*，亦可译为"均衡"，以区别于 *equilibrium*．

② 译注 应为第四卷，译成本丛书第十五、十六、十七分册．

2.2 全局平衡定律

在连续统物理中以下八个平衡定律作为公设成立，不管物质的构成和几何形状如何：

(i) 质量守恒，

(ii) 动量平衡，

(iii) 动量矩平衡，

(iv) 能量守恒，

(v) 熵不等式，

(vi) 电荷守恒，

(vii) 法拉第定律，

(viii) 安培定律.

对于其电磁效应不重要的力学介质，不妨不考虑最后三个定律①. 通常，定律(iv)和(v)的研究是热力学的主题. 下面我们先把前五个定律列为公设，而把对(iv)和(v)的补充讨论延迟到第三卷中②.

平衡定律的适用范围受到相对论性速度和尺寸以及量子力学现象的限制. 对于接近真空中光速(狭义相对论)的物质速度，这些定律要加以修正. 另外，对于巨大的星际距离，必须考虑空间的曲率(广义相对论). 对于原子现象和核现象，其中重要的是量子力学现象，也要对这些定律作大修改.

基本公理(i)(质量守恒定律)　物体总质量在运动中不变.

① 原注　有关电磁定律以及电磁效应与可变形体相互作用的详细讨论，参见本丛书第十四分册.

② 译注　见前页注.

在连续统物理中，假设存在着一个连续的质量量度（质量密度）ρ，因而物体总质量为

$$(2.2.1)\qquad M=\int_{\mathscr{V}}\rho dv,\quad 0\leqslant\rho<\infty$$

其中积分在物体的物质体积 $\mathscr{V}$ 上进行.

质量守恒律说，物体的起始总质量等于任何其他时刻物体总质量，即

$$(2.2.2)\qquad \int_{V}\rho_0 dV=\int_{\mathscr{V}}\rho dv$$

采用变换规律 $dv=JdV$ 后，上式可写为

$$(2.2.3)\qquad \int_{V}(\rho_0-\rho J)d\mathscr{V}=0$$

另一种办法是，对(2.2.2)取物质导数得

$$(2.2.4)\qquad \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}}\rho dv=0$$

无论(2.2.3)还是(2.2.4)都表达质量守恒律.

基本公理(ii)（动量平衡定律）　动量的时间变率等于作用于物体的合力 $\boldsymbol{F}$.

数学形式是

$$(2.2.5)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}}\rho\boldsymbol{v}dv=\boldsymbol{F}$$

其中左端是物体总动量的时间变率. 作用于物体上的力包括体力（它们由宇宙间其他物体的远距作用引起）以及面力（它们通过与其他物体接触传递来）. 在体力中可举出重力和电磁力为例. 也还可以在物体上某些孤立点 $\boldsymbol{p}_\alpha$ 处作用有集中力 $\boldsymbol{F}_\alpha$. 于是可写出

$$(2.2.6)\qquad \boldsymbol{F}=\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}da+\int_{\mathscr{V}}\rho\boldsymbol{f}pv+\sum_{\alpha}\boldsymbol{F}_\alpha$$

其中 $\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}$ 代表物体表面 $\mathscr{S}$ 单位表面积（其单位法线为 $\boldsymbol{n}$）的面力密度，而 $\boldsymbol{f}$ 是单位质量的体力密度[1]。注意 $\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 和 t 的函数．此外，$\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}$ 还依赖于法向矢量 $\boldsymbol{n}$．动量平衡定律为

(2.2.7)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}}\rho\boldsymbol{v}dv=\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}da+\int_{\mathscr{V}}\rho\boldsymbol{f}dv+\sum_{\alpha}\boldsymbol{F}_{\alpha}$$

基本公理(iii)（动量矩平衡）　动量矩的时间变率等于所有作用于物体的力和力偶的合力矩：

(2.2.8)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}}\rho\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{v}dv=\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}da+\int_{\mathscr{V}}\rho\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{f}dv+\sum_{\alpha}(\boldsymbol{p}_{\alpha}\times\boldsymbol{F}_{\alpha}+\boldsymbol{M}_{\alpha})$$

其中左端是对原点总动量矩的时间变率．右端第一个积分是表面牵引力(*surface traction*)[2]对原点的总力矩，而第二个积分是体力对原点的总力矩．求和符号下第一项给出孤立力 $\boldsymbol{F}_{\alpha}$ 的矩，而 $\boldsymbol{M}_{\alpha}$ 代表可能在孤立点处作用的集中力偶。

基本公理(iv)（能量守恒）　动能 $\mathscr{K}$ 与内能 $\mathscr{E}$ 总和的时间变率等于所有力及力偶的功率 $\mathscr{W}$ 以及单位时间内进入或离开物体所有其他能量 $\mathscr{U}_{\alpha}$ 的总和。数学形式是

(2.2.9)　$$\frac{D}{Dt}(\mathscr{K}+\mathscr{E})=\mathscr{W}+\sum_{\alpha}\mathscr{U}_{\alpha}$$

---

① 译注　指面力密度是单位表面体的面力，而体力密度是单位质量的体力．

② 译注　照作者另一著作（*Eringen* 1962，95页）解释，表面牵引力就是上文中的面力密度t(n)．

在连续统物理中假设存在着内能密度 ε，即

(2.2.10) $$\mathscr{E}=\int_{\mathscr{V}}\rho\varepsilon dv$$

物体的总动能是

(2.2.11) $$\mathscr{K}=\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}dv$$

体载荷和面载荷的功率① 等于

(2.2.12)

$$\mathscr{W}=\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}\cdot\boldsymbol{v}dv+\int_{\mathscr{V}}\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}dv+\sum_{\alpha}(\boldsymbol{F}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{v}_{\alpha}+\boldsymbol{M}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\alpha})$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{p}_{\alpha}$ 点处的角速度．进入或离开物体的其他能量中，可能有热能、电磁能、化学能，或其他能源．这里我们只考虑热能．输入的热能包括经过表面 $\mathscr{S}$ 进入物体的热流（由单位面积热量矢量 $\mathbf{q}$ 代表）以及分布在体内的热源所供应的能（单位质量供应能量率即体密度为 h）②．于是

(2.2.13)

$$\sum_{\alpha}\mathscr{U}_{\alpha}=\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{a}+\int_{\mathscr{V}}\rho h dv+\sum_{\alpha}H_{\alpha}$$

其中 H_{α} 代表在 $\boldsymbol{p}_{\alpha}$ 点处孤立热源．热量矢量 $\boldsymbol{q}$ 与热通量指向相反．

---

① 译注　原文是“能量”．

② 译注　此句按作者另一著作（*Eringen* 1962，113页）改写．原文是“热能包括热量 q 和体密度 h”．又（2.2.13）式左端原文是 $U_1=Q$．

于是能量平衡定律(2.2.9)成为①

(2.2.14)

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}}(\rho\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})dv=\oint_{\mathscr{S}}(\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})da$$

$$+\int_{\mathscr{V}}(\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\rho h)dv+\sum_{\alpha}(\boldsymbol{F}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{v}_{\alpha}$$

$$+\boldsymbol{M}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\alpha}+H_{\alpha})$$

基本公理(v)(熵不等式)　总熵H的时间变率永远不小于经过物体表面熵的流入通量$\boldsymbol{s}$以及由体源供应的熵流入通量B之和.

数学形式为

$$(2.2.15)\quad \Gamma\equiv(DH/Dt)-B-\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{a}\geqslant 0$$

其中这样定义的Γ称为总熵产量(产率)(*total entropy production*)。在连续统物理中，假设熵密度η和熵源密度b(按单位质量计)都存在，即

(2.2.16)

$$H=\int_{\mathscr{V}}\rho\eta dv,$$

$$B=\int_{\mathscr{V}}\rho b dv+\sum_{\alpha}B_{\alpha}$$

其中B_{α}是孤立熵源密度. 于是熵的定律成为

(2.2.17)

$$\Gamma\equiv\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}}\rho\eta dv-\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{a}$$

$$-\int_{\mathscr{V}}\rho b dv-\sum_{\alpha}B_{\alpha}\geqslant 0$$

① 译注　原文(2.2.14)式漏脱最后一项H_{α}。

以上各定律作为公设认为对所有物体成立，不论物体的性质、它的几何形状和构成如何．它们对所有物理现象的讨论是基本的．为了得到局部的方程，还要附加的限制．这些在以下各节给出．

2.3 局部平衡的主定律

积分定理(1.14.18)对推导局部平衡定律是基本的．我们看到，在没有孤立效应①时，平衡定律(i)到(iv)都具有(1.14.16)的形式，即

$$
(2.3.1)\qquad \frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}-\sigma}\phi dv-\oint_{\mathscr{S}-\sigma}\boldsymbol{\tau}\cdot d\boldsymbol{a} -\int_{\mathscr{V}-\sigma}g dv=0
$$

熵不等式(2.2.17)在 $B_\alpha=0$ 时也有这一形式，只是等号＝改为≥．有了这样的理解后，可以得到普遍的平衡方程(1.14.18)：

$$
(2.3.2)\qquad \int_{\mathscr{V}-\sigma}[(\partial\phi/\partial t)+\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{v})-\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}-g]dv +\int_{\sigma}[\![\phi(\boldsymbol{v}-\mathrm{u})-\boldsymbol{\tau}]\!]\cdot\boldsymbol{n}da=0
$$ ②

为推导局部平衡律，还要附加一条公设．

局部性公设　主平衡律(2.3.2)对物体每一部分成立．

① 译注　指集中力、集中力偶、孤立热源以及孤立熵源等．

② 译注　原文漏脱“＝0”．

这意思是，全局平衡律对物体每一个体积元成立．于是，积分域$\mathscr{V}-\sigma$，$\mathscr{S}-\sigma$和σ可以用任何小体积$v\in\mathscr{V}$，曲面$s\in\mathscr{S}$和$\sigma'\in\sigma$所代替，而各平衡律仍然成立．这是一个很强的假设．这个过程将叫做**局部化**①．

现对(2.3.1)和(2.3.2)作局部化．考虑一个小四面体，其体积为Δv，它的三个面位于坐标曲面上，面积矢量为$\Delta \boldsymbol{a}_k$，而第四个面的面积矢量是$\Delta \boldsymbol{a}$，其外向单位法线为$\boldsymbol{n}$（图2.3.1）．在极限中，当四面体收缩成零，面积矢量$\Delta \boldsymbol{a}$的极限$d\boldsymbol{a}$等于坐标曲面上极限面积矢量$d\boldsymbol{a}_k$之和，因而

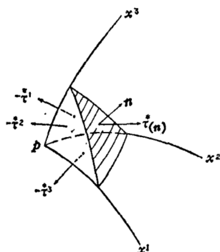


图 2.3.1　近表面处的小四面体

(2.3.3)
$$d\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}da=da_k\boldsymbol{g}^k$$

由此得出

(2.3.4)
$$da_k=n_k da,\quad da^k=n^k da$$

设$-\tau^k$是τ在坐标曲面Δa_k上的值，$\tau_{(n)}$为τ在Δa上的值．对这个四面体写出(2.3.1)式并采用中值定理．于是有

$$\frac{D}{Dt}(\overset{*}{\phi}\Delta v)+\overset{*}{\tau}{}^k\Delta a_k-\overset{*}{\tau}_{(n)}\Delta a-\overset{*}{g}\Delta v=0$$

---

① 原注　注意，对非局部理论要废除这一公设而只设全局平衡律成立．但这情形中局部化仍是可能的，只是局部定律中含有所谓**局部化残量**．见 *Eringen*，1972 *a*，*b*，*c*；*Eringen* 和 *Edelen*，1972．也见本书第三卷（译注　应为第四卷，译为本丛书第十六；十七分册）．

其中$\overset{*}{\phi}$和$\overset{*}{g}$是Δv的某一点处的ϕ和g值，$\overset{*}{\tau}{}^k$和$\overset{*}{\tau}_{(n)}$分别是Δa_k和Δa中某些点处τ^k和$\tau(\mathbf{n})$的值。在极限中当$\Delta v \to 0$时，$\Delta v / \Delta a \to 0$，上式给出

$$\tau^k da_k = \tau(\mathbf{n}) da$$

利用(2.3.4)我们有

$$(2.3.5) \qquad \tau(\mathbf{n}) = \tau^k n_k$$

因为τ^k对$\boldsymbol{n}$是独立的由上式可得

$$(2.3.6) \qquad \tau(-\mathbf{n}) = -\tau(\mathbf{n})$$

这就证明了下列定理.

定理 1 作用于表面的场τ是表面外单位法线的线性函数，作用于同一面两边的场τ相等且相反.

其次将(2.3.5)代入(2.3.2)并对它局部化. 因为它必须对物体每一部分成立我们一定有

(2.3.7)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g^{-\frac{1}{2}}(\phi g^{\frac{1}{2}} v^k)_{,k} - g^{-\frac{1}{2}}(g^{\frac{1}{2}}\tau^k)_{,k} - g = 0 \quad (\text{在}\mathscr{V} - \sigma\text{内})①$$

$$(2.3.8) \qquad [\phi(v^k - \nu^k) - \tau^k] n_k = 0 \quad (\text{在}\sigma\text{上})$$

在(2.3.7)中第二和第三项分别是$\phi\boldsymbol{v}$和τ散度的表达式（参见第一分册，2.6节）。这些是局部平衡定律的主方程，(2.

① 译注 (2.3.7)式中最后一个g和前四个g的意义不同。

3.7) 式是场方程而(2.3.8) 是相伴随的跳跃条件。各别的平衡定律都可以从(2.3.5)到(2.3.8)中推导出来. 导出熵不等式时等号应换成≥.

在某些问题中平衡方程采用物质描述较方便. 为了表达正在变形中物体的边界条件, 我们必须知道物体表面占据的地位. 一般说来, 在空间描述法中,这在刚着手时是未知的, 它必须作为场方程解的一部分来确定. 问题又是非线性的, 这件事就不易办到. 但是, 如果场方程是在物质标架中表达出来的, 这个问题就可以回避了, 因为通常物体表面的初始位置是已知的. 所以, 在物质标架中表达局部平衡定律, 边界条件可以大为简化. 可是在这种情况中微分方程形式可能更为复杂.

为了得出(2.3.7)和(2.3.8)的物质形式,将(2.3.1)中体积分和面积分转变成未变形体中的体积分和面积分. 利用(1.8.6)和(1.8.10)这是可以做到的. 于是有

(2.3.9)

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\Sigma}\phi J dV-\oint_{S-\Sigma}\mathscr{T}^{K}dA_{K}$$

$$-\int_{V-\Sigma}gJdV=0$$

其中V和S是未变形物体的体积和表面, Σ是σ在未变形体中的映象; 而

(2.3.10) $$\mathscr{T}^{K}\equiv JX^{K}{}_{,k}\tau^{k}$$

和(2.3.2)相仿, (2.3.9)式可以变换成

(2.3.11)

$$\int_{V-\Sigma}\left[\frac{\partial(\phi J)}{\partial t}-G^{-\frac{1}{2}}(G^{\frac{1}{2}}\mathscr{T}^{K})_{,K}-Jg\right]dV$$

$$+\int_{\Sigma}[\phi(V^{K}-\nu^{K})-\mathscr{T}^{K}]N_{K}dA=0$$

局部化的结果是

(2.3.12)

$$\frac{\partial(\phi J)}{\partial t}-G^{-\frac{1}{2}}(G^{\frac{1}{2}}\mathscr{T}^{K})_{,K}-Jg=0\quad(\text{在}V-\Sigma\text{中})$$

(2.3.13) $[\phi J(V^{K}-\nu^{K})-\mathscr{T}^{K}]N_{K}=0$ (在Σ上)

类似于(2.3.5)到(2.3.9)，我们也可推导出

(2.3.14) $$\mathscr{T}_{(\mathbf{N})}=\mathscr{T}^{K}N_{K}$$

上式给出外单位法线为N的物质面上的场$\mathscr{T}_{(\mathbf{N})}$，用在坐标面上的场$\mathscr{T}^{K}$表达出来.这些结果可叙述为以下定理.

定理 2 场ϕ的局部平衡的必要且充分条件是：在空间参照架中的(2.3.7)和(2.3.8)式，或者在物质参照架中的(2.3.12)和(2.3.13)式.

以下我们运用这些结果导出各别的平衡定律.

2.4 局部平衡定律

2.4.1 质量守恒

质量守恒的全局方程由(2.2.3)和(2.2.4)中任一个表示，即

(2.4.1) $$\int_{V-\Sigma}(\rho_0-\rho J)dV=0$$

(2.4.2) $$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho dv=0$$

比较(2.4.2)和(2.3.1)我们认出 $\phi=\rho$, $\tau=0$, $g=0$. 于是按(2.3.7)和(2.3.8),(2.4.2)的局部形式是

(2.4.3) $$(\partial\rho/\partial t)+g^{-\frac{1}{2}}(\rho g^{\frac{1}{2}}v^k)_{,k}=0 \quad (\text{在}\mathscr{V}-\sigma\text{内})$$

$$[\![\rho(v^k-\nu^k)]\!]n_k=0 \quad (\text{在}\ \sigma\ \text{上})$$

它们可写成其他的形式，利用

(2.4.4) $$g^{-\frac{1}{2}}(g^{\frac{1}{2}})_{,k}=\left\{ {r \atop rk} \right\}$$

得出

(2.4.5) $$(\partial\rho/\partial t)+(\rho v^k)_{;k}=0 \quad (\text{在}\mathscr{V}-\sigma\text{内})$$

(2.4.6) $$[\![\rho(v^k-\nu^k)]\!]n_k=0 \quad (\text{在}\sigma\text{上})$$

(2.4.5)的另一个有用形式是

(2.4.7) $$\frac{D}{Dt}(\rho\, dv)=0$$

物质描述的形式由(2.3.12)得出,它是显见的形式 $\dot{\rho}_0=0$. 通常(2.4.7)的积分在物质形式中有用，按照(2.4.1)它是

(2.4.8) $$\rho_0-\rho J=0 \quad \text{或} \quad \rho_0=\rho(III_C)^{\frac{1}{2}}$$

所有这些都是局部质量守恒各种形式的表达式，也证实了以下定理:

定理 1　质量局部守恒当且仅当(2.4.5)和(2.4.6)成立，亦即(2.4.7)或(2.4.8)和(2.4.6)成立.

2.4.2 动量平衡

动量全局平衡律由(2.2.7)给出.设$\boldsymbol{F}_\alpha=0$且间断面σ扫过物体，其速度为u，它成为

(2.4.9)

$$(d/dt)\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho\boldsymbol{v}dv-\oint_{\mathscr{S}-\sigma}\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}\,da-\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho\boldsymbol{f}\,dv=0$$

将它和主平衡律(2.3.1)比较可以认出$\phi=\rho\boldsymbol{v}$，$\tau=\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}$和$g=\rho\boldsymbol{f}$①. 于是从(2.3.5)可得

(2.4.10)
$$\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}=\boldsymbol{t}^k n_k$$

其中$\boldsymbol{t}^k$称为应力矢量. 它们是坐标曲面上的牵引力. 由此我们有第一个结果

(2.4.11)
$$\boldsymbol{t}_{(-\mathbf{n})}=-\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}$$

于是得下列定理：

定理 2　表面上所受牵引力是这面单位外法线的线性函数，同一面两侧所受牵引力相等且反向.

这定理第二部分是牛顿第三定律的相应部分，牛顿第三定律有时说成为作用等于反作用.

如现在对(2.4.9)局部化，则按照(2.3.7)和(2.3.8)，我

---

① 译注　这里的意思是，标量ϕ用矢量$\rho\boldsymbol{v}$的分量代替，标量$\tau\cdot d\boldsymbol{a}$用矢量$\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}da$的分量代替，$б$用$\rho\boldsymbol{f}$的分量代替。

们得

(2.4.12)

$$\partial(\rho\boldsymbol{v})/\partial t+g^{-\frac{1}{2}}(g^{\frac{1}{2}}\rho\boldsymbol{v}v^{k})_{,k}-g^{-\frac{1}{2}}(g^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{t}^{k})_{,k}-\rho\boldsymbol{f}=0$$

(在$\mathscr{V}-\sigma$内)

$$[\![\rho\boldsymbol{v}(v^{k}-\nu^{k})-\boldsymbol{t}^{k}]\!]n_{k}=0 \quad (\text{在}\sigma\text{上})$$

作出(2.4.12)$_1$中前两项中所示微分，并利用(2.4.5)，可得

(2.4.13) $\quad g^{-\frac{1}{2}}(g^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{t}^{k})_{,k}+\rho(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a})=0$ （在$\mathscr{V}-\sigma$内）

(2.4.14) $\quad [\![\rho\boldsymbol{v}(v^{k}-\nu^{k})-\boldsymbol{t}^{k}]\!]n_{k}=0$ （在σ上）

其中 $\boldsymbol{a}$ 是加速度矢量，其定义为

(2.4.15) $\quad \boldsymbol{a}\equiv\dot{\boldsymbol{v}}=(\partial\boldsymbol{v}/\partial t)+\boldsymbol{v}_{,k}v^{k}$

这些是局部动量平衡方程。(2.4.13)式是场方程而(2.4.14)是相伴随的跳跃条件。

方程(2.4.13)和(2.4.14)的物质形式可从(2.3.12)和(2.3.13)得出

(2.4.16)

$$G^{-\frac{1}{2}}(G^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{T}^{K})_{,K}+\rho_{0}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a})=0 \quad (\text{在}V-\Sigma\text{内})$$

(2.4.17)

$$[\![\rho_{0}\boldsymbol{v}(V^{K}-\nu^{K})-\boldsymbol{T}^{K}]\!]N_{K}=0 \quad (\text{在}\Sigma\text{内})$$

其中 $\boldsymbol{T}^{K}$ 是参照于$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$处未变形面积 dA_{K} 在$\boldsymbol{x}$处的应力矢量，而$\boldsymbol{N}$ 是 $d\boldsymbol{A}$ 的外单位法线。按照(2.3.10)我们有

$$(2.4.18)\qquad T^K = JX^K{}_{,k}t^k,\quad t^k = J^{-1}x^k{}_{,K}T^K$$

这些结果可以叙述为

定理 3 质量局部守恒时，动量局部平衡的必要且充分条件是或者(2.4.13)和(2.4.14)成立，或者(2.4.16)和(2.4.17)成立.

局部平衡方程可以用分量形式写出，为此引进应力张量的概念.

定义 应力张量 t_{kl} 是作用于第 k 个坐标面正侧的应力矢量 $\boldsymbol{t}_k$ 的第 l 个分量：

$$(2.4.19)\qquad \boldsymbol{t} = t_{kl}\boldsymbol{g}^l$$

这里 t_{kl} 的第一个指标指出 $\boldsymbol{t}_k$ 属于哪一个面，它的第二个指标说明分量的方向. 例如 t_{21} 是 $\boldsymbol{t}_2$ 的 x^1 分量，而 $\boldsymbol{t}_2$ 作用于坐标面 x^2 = 常量. 如果坐标曲面 x^k = 常量的外法线和坐标曲线的正向相交成锐角，则约定 t_{kl} 的正向与坐标的正向相同. 如果外法线和 x^k 正坐标曲线夹角大于90°，则 t_{kl} 的正分量指向负坐标方向. 在图 2.4.1 中表示出长方六面体各面上 t_{kl} 的正向. 空间坐标系是直角的. 为了不使图太拥挤，只画出两对平行面上的应力分量. 分量 t_{11}，t_{22} 和 t_{33} 称为法向应力，而混合分量如 t_{12}，t_{31}等则称为剪切应力. 应力张量 $\boldsymbol{t}$ 可以排列成矩阵形式

$$(2.4.20)\qquad \|t_{kl}\| = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

因为 t_{kl} 是一绝对张量，采用升标和降标可以得到混合

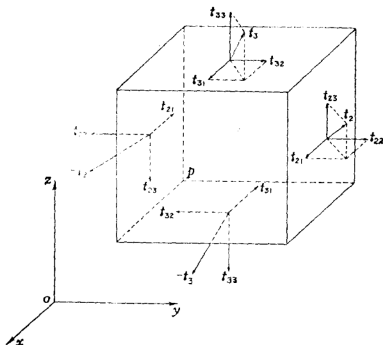


图 2.4.1 应 力 张 量

张量 $t_k{}^l$，$t^k{}_l$，以及逆变张量 t^{kl}：

$$(2.4.21)\qquad t^k{}_l = g^{km}t_{ml},\quad t_l{}^k = g^{km}t_{lm}$$
$$t^{kl} = g^{lm}t^k{}_m = g^{km}t_m{}^l = g^{km}g^{ln}t_{mn}$$

以这些代入(2.4.19)并将结果代入(2.4.10)，我们得到应力矢量和牵引力：

$$(2.4.22)\qquad \boldsymbol{t}_k = t_{kl}\boldsymbol{g}^l = t_k{}^l\boldsymbol{g}_l,\quad \boldsymbol{t}^k = t^{kl}\boldsymbol{g}_l = t^k{}_l\boldsymbol{g}^l$$
$$\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})} = t_{kl}n^k\boldsymbol{g}^l = t^k{}_l n_k\boldsymbol{g}^l = t_k{}^l n^k\boldsymbol{g}_l = t^{kl}n_k\boldsymbol{g}_l$$

如将$(2.4.22)_2$代入(2.4.13)和(2.4.14)，利用(2.4.4)和

$$(2.4.23)\qquad \boldsymbol{g}_{k,m} = \begin{Bmatrix} r \\ k\,m \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}_r$$

我们得(2.4.13)和(2.4.14)的分量形式：

$$(2.4.24)\quad t^{kl}{}_{;k}+\rho(f^l-a^l)=0 \quad (\text{在}\mathscr{V}-\sigma\text{内})$$

$$(2.4.25)\quad [\rho v^l(v^k-\nu^k)-t^{kl}]n_k=0 \quad (\text{在}\sigma\text{上})$$

其中加速度 a^l 由

$$(2.4.26)\qquad a^l=(\partial v^l/\partial t)+v^l{}_{;m}v^m$$

给出．方程(2.4.24)和(2.4.25)称为柯西运动方程或柯西运动第一定律．

柯西运动方程的物质形式可从(2.4.16)和(2.4.17)得出．我们先引进皮奥拉-基尔霍夫伪应力(*Piola-Kirchhoff pseudo-stress*) T^{Kl} 如下：

令

$$(2.4.7)\qquad \boldsymbol{T}^K=T^{Kl}\boldsymbol{g}_l=T^{KL}x^l{}_{,L}\boldsymbol{g}_l$$

利用(2.4.18)和(2.4.22)$_2$求得

$$(2.4.28)\qquad T^{Kl}=JX^K{}_{,k}t^{kl},$$
$$T^{KL}=T^{Kl}X^L{}_{,l}=JX^K{}_{,k}X^L{}_{,l}t^{kl}$$

当这些代入(2.4.16)和(2.4.17)，得

$$(2.4.29)\quad T^{Kk}{}_{:K}+\rho_0(f^k-a^k)=0 \quad (\text{在}V-\Sigma\text{内})$$

$$(2.4.30)\quad [\rho_0 v^k(V^K-\nu^K)-T^{Kk}]N_K=0 \quad (\text{在}\Sigma\text{上})$$

冒号(：)紧接的下标表示对双点张量场 $T_K{}^k$ 求全协变导数，(参见第一分册，3.5节)，例如，

(2.4.31)

$$A^{Kk}{}_{;L} \equiv A^{Kk}{}_{,L} + \left\{ {K \atop LM} \right\} A^{Mk} + \left(A^{Kk}{}_{,l} + \left\{ {k \atop lm} \right\} A^{Km} \right) x^l{}_{,L}$$

注意到 $T^{Kk} = T^{Kk}(\boldsymbol{X})$，所以 $T^{Kk}{}_{,l} = 0$。(2.4.29) 展开成为

(2.4.32)

$$T^{Kk}{}_{,K} + T^{Km} \left\{ {k \atop ml} \right\} x^l{}_{,K} + T^{Kk} \left\{ {L \atop LK} \right\} + \rho_0 (f^k - a^k) = 0$$

所以在边界条件比较简单的参照架里，微分方程则可能更复杂了。

2.4.3 动量矩平衡

设物体 $\mathscr{V} + \mathscr{S}$ 有一间断面 σ 扫过，且 $\boldsymbol{F}_\alpha = 0$，$\boldsymbol{M}_\alpha = 0$，$\boldsymbol{t}_{(\mathbf{n})}$ 用它的值(2.4.10)代入后，全局动量矩平衡方程是

(2.4.33)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathscr{V} - \sigma} \rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} dv - \oint_{\mathscr{S} - \sigma} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}^k n_k da$$

$$- \int_{\mathscr{V} - \sigma} \rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{f} dv = 0$$

上式与(2.3.1)相比较，可认出①

$$\phi = \rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} \qquad \tau^k = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}^k \qquad g = \rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{f}$$

局部化形式(2.3.7)和(2.3.8)现在成为

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v})}{\partial t} + g^{-\frac{1}{2}} (g^{\frac{1}{2}} \rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} v^k)_{,k}$$

① 译注 这里“=”是“代表”的意思，见前段 2.4.2(动量平衡)相应的译注(101页)。

$$-g^{-\frac{1}{2}}(g^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}^k)_{,k}-\rho\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{f}=0 \quad \text{(在}\mathscr{V}-\sigma\text{内)} \tag{2.4.34}$$

$$[\rho\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{v}(v^k-\nu^k)-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}^k]n_k=0 \quad \text{(在}\sigma\text{上)}$$

作出(2.4.34)中所示微分运算，得到

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{v}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{g^{\frac{1}{2}}}(g^{\frac{1}{2}}\rho v^k)_{,k}\right]+\boldsymbol{p}\times\left[\rho(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{g^{\frac{1}{2}}}(g^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{t}^k)_{,k}\right]+\boldsymbol{p}_{,k}\times\boldsymbol{l}^k=0$$

上式前两项等于零，因为局部质量守恒方程(2.4.3)和局部动量平衡方程(2.4.13)成立. 又因$\boldsymbol{p}_{,k}=\boldsymbol{g}_k$，我们得

$$\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k=0 \tag{2.4.35}$$

跳跃方程$(2.4.34)_2$被恒等地满足，因为(2.4.14)成立，且位置矢量$\boldsymbol{p}$假设是连续的，否则物质（材料）中将有断裂或位错.

如$\boldsymbol{t}^k$用(2.4.22)代替，(2.4.35)给出

$$t^{kl}=t^{lk} \tag{2.4.36}$$

于是我们证明了柯西运动第二定律：

定理 4　当质量局部守恒且局部动量平衡时，动量矩局部平衡的必要且充分条件是应力张量的对称性①.

---

① 原注　在第三卷（译注　应为第四卷，即本丛书第十五到十七分册）将看到，这个结果对物质点不能负担力偶的简单物质是正确的. 对于更复杂的介质，动量矩定律要作修正以便包括有结构的物质 其中物质点可以赋予内部结构，具有负担高阶矩（诸如应力偶 *couple stress* 等）的能力.

在物质描述法中，容易看到结果(2.4.36)等价于

(2.4.37) $T^{Kk}x^{m}{}_{,K}=T^{Km}x^{k}{}_{,K}$ 或 $T^{KL}=T^{LK}$

由(2.4.28)解出 t^{kl}，得

(2.4.38) $t^{kl}=J^{-1}x^{k}{}_{,K}T^{Kl}=J^{-1}x^{k}{}_{,K}x^{l}{}_{,L}T^{KL}$

以此直接代入(2.4.36)即得(2.4.37).

2.4.4 能量守恒

如不考虑孤立能源，带间断面 σ 的物体 $\mathscr{V}+\mathscr{S}$ 上全局能量平衡的形式(参见2.2.14)为

(2.4.39)

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}-\sigma}\left(\rho\varepsilon+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)dv$$

$$-\int_{\mathscr{S}-\sigma}(\boldsymbol{t}^{k}\cdot\boldsymbol{v}+q^{k})u_{k}da$$

$$-\int_{\mathscr{V}-\sigma}(\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\rho h)dv=0$$

这式和(2.3.1)相比较，认别出

$$\phi=\rho\varepsilon+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v},\quad \tau^{k}=\boldsymbol{t}^{k}\cdot\boldsymbol{v}+q^{k},\quad g=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\rho h$$

现可按照(2.3.7)和(2.3.8)的方式进行局部化，即

(2.4.40)

$$(\partial/\partial t)\left(\rho\varepsilon+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)$$

$$+g^{-\frac{1}{2}}\left[g^{\frac{1}{2}}\left(\rho\varepsilon+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)v^{k}\right]_{,k}$$

$$- g^{-\frac{1}{2}}[\, g^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v} + q^k)\,,_k$$

$$-(\rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \rho h) = 0 \quad (\text{在}\mathscr{V} - \sigma\text{内})$$

$$[\![\left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \right)(v^k - \nu^k) - \boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v}$$

$$- q^k]\!] n_k = 0 \quad (\text{在}\sigma\text{上})$$

完成$(2.4.40)_1$中所示微分运算并利用连续性方程①(2.4.3)和局部动量平衡式(2.4.12)，(2.4.40)可以大为简化．结果是

(2.4.41) $\rho\dot{\varepsilon} - \boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v}_{,k} - q^k{}_{;k} - \rho h = 0 \quad (\text{在}\mathscr{V} - \sigma\text{内})$

(2.4.42) $[\![\left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \right)(v^k - \nu^k)$

$$- \boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v} - q^k]\!] n_k = 0 \quad (\text{在}\sigma\text{上})$$

用分量记号(2.4.41)也可写为

(2.4.43) $\rho\dot{\varepsilon} - t^k{}_l v^l{}_{;k} - q^k{}_{;k} - \rho h = 0 \quad (\text{在}\mathscr{V} - \sigma\text{内})$

在(2.4.41)和(2.4.42)中利用(2.4.8)和$(2.4.18)_2$，容易得到这些方程的物质形式，它们是

(2.4.44) $\rho_0\dot{\varepsilon} - \boldsymbol{T}^K \cdot \boldsymbol{v}_K - Q^K{}_{;K} - \rho_0 h = 0 \quad (\text{在}V - \Sigma\text{内})$

(2.4.45) $[\![\left(\rho_0\varepsilon + \frac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \right)(V^K - \nu^K)$

$$- \boldsymbol{T}^K \cdot \boldsymbol{v} - Q^K]\!] N_K = 0 \quad (\text{在}\sigma\text{内})$$

---

① 译注　指质量守恒方程．

其中已按照(1.3.9)写出 $(JX^K{}_{,k})_{;K}=0$ 并引进

(2.4.46) $$Q^K \equiv JX^K{}_{,k}q^k$$

这些结果可以叙述为

定理 5 局部能量守恒的必要且充分条件是在空间参照架中满足(2.4.41)和(2.4.42)，或者在物质参照架中满足(2.4.44)和(2.4.45)。

方程(2.4.41)或(2.4.44)说明这样的物理事实，即内能的变化 $\rho\dot{\varepsilon}$ 是由于应力功率 $\mathbf{t}^k\cdot\mathbf{v}_{,k}$(即单位时间应力的功)，热量流 $q^k{}_{,k}$，以及热量源 ρh。

2.4.5 熵不等式

设孤立熵源为零 $B_\alpha=0$，带间断面 σ 的 $\mathscr{V}+\mathscr{S}$ 上全局熵不等式按(2.2.17)可写成

(2.4.27)

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho\eta dv-\oint_{\mathscr{S}-\sigma}\mathbf{s}\cdot d\mathbf{a}$$

$$-\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho b dv\geqslant 0$$

上式与(2.3.1)相比较，揭示出

$$\phi=\rho\eta,\qquad \tau^k=s^k,\qquad g=\rho b$$

由此从(2.3.7)和(2.3.8)即得(2.4.47)的局部化形式，其中等号换成≥，即

(2.4.48)

$$(\partial/\partial t)(\rho\eta)+g^{-\frac{1}{2}}(\rho\eta g^{\frac{1}{2}}v^k)_{,k}-g^{-\frac{1}{2}}(g^{\frac{1}{2}}s^k)_{,k}-\rho b\geqslant 0$$

(在 $\mathscr{V}-\sigma$ 内)

$$【\rho\eta(v^k-\nu^k)-s^k】n_k\geqslant 0 \quad (在\sigma上)$$

完成所示微分并用(2.4.3)，得

(2.4.49) $\rho\dot{\eta}-s^k{}_{;k}-\rho b\geqslant 0$ （在$\mathscr{V}-\sigma$内）

(2.4.50) $【\rho\eta(v^k-\nu^k)-s^k】n_k\geqslant 0$ （在σ上）

这些不等式的物质形式很易得到，写出 $\rho=\rho_0 J^{-1}$ 并引进

(2.4.51) $S^K\equiv JX^K{}_{;k}s^k$

因为$J>0$，得

(2.4.52) $\rho_0\dot{\eta}-S^K{}_{;K}-\rho_0 b\geqslant 0$ （在$V-\Sigma$内）

(2.4.53) $【\rho_0\eta(V^K-\nu^K)-S^K】N_K\geqslant 0$ （在Σ上）

这些结果可表述为

定理 6 要局部熵不等式（热力学第二定律）不被违背，必须且只须在空间参照架中满足(2.4.49)和(2.4.50)，或者在物质参照架中满足(2.4.52)和(2.4.53)。

到此为止我们没有说起 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的任何性质。有关这些和连续统热力学的论论将在第三章中给出。

2.5 应力二次曲面 应力不变量

设曲面 s 上一点 p 处外法线为 $\boldsymbol{n}$，应力矢量 $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}$ 的法向分量N为（见图2.5.1）

(2.5.1) $N=\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}\cdot\boldsymbol{n}=t_{kl}n^k n^l$

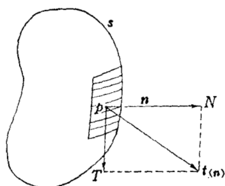


图 2.5.1 法向和切向牵引力

对于固定的N，如果改变曲面s的方位$\boldsymbol{n}$，则应力张量将按照（2.5.1）作变化．这是一个二次曲面的方程，这曲面称为柯西应力二次曲面．因为$\boldsymbol{n}$大小为一，变量n^k要满足等式

（2.5.2）
$$g_{kl}n^k n^l = 1$$

应力张量既然是对称的，我们看到在柯西应力二次曲面和柯西应变二次曲面①之间，有一个完全的对应关系．因此我们可以把1.6节的主要结果搬移过来：

（1）存在至少三个且一般是三个应力主方向．

（2）有三个主应力$t_\alpha(\alpha=1, 2, 3)$，它们作用于主平面上．

（3）在主平面上剪切应力为零，法向应力取得驻值．

（4）存在三个独立的应力不变量．这些不变量的形式与应变不变量的相同，只是所有的C_L^K和C_α现在分别改为t_l^k和t_α．

如果主应力中两个等于零，应力状态称为是单轴的；如果主应力中一个等于零，应力状态是平面或双轴的；如果都不等于零，应力状态是三轴的．如在平面应力中两个主应力大小相等但正负号相反，应力状态称为简单剪切，因为在这情形中，

① 译注 应变二次曲面即1.5节所说应变椭球面，但应力二次曲面不一定是椭球面。

在主应力平面的平分平面上法向应力等于零. 在直角坐标中，简单剪切因而可以用形式为

(2.5.3) $$\|t_{kl}\| = \begin{Vmatrix} 0 & t_{xy} & 0 \\ t_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

的矩阵来表示. 最后，类似于1.6节中定理5的证明，可以证明：

定理 1 剪切应力的极值在主应力平面的平分平面上，其中最大的剪切应力是在平分最大应力和最小应力的平面上. 剪切应力的极值是主应力差的一半。

2.6 应力通量

实验表明，某些物质(材料)的动态性能依赖于应力的时间变率. 可是，用

(2.6.1) $$\dot{t}^{kl} \equiv Dt^{kl}/Dt$$

所定义的应力率并不能用作一个客观的变量，因为在空间参照架作刚性转动时应力率不是独立的. 必须引进一个新的张量，它与应力率有关，但又没有上述缺陷. 为此可采用获得里夫林-爱里克森张量相仿的方式，利用

(2.6.2) $$(d\sigma)^2 = t_{kl}dx^k dx^l$$

的物质时率. 例如，

$$D(d\sigma^2)/Dt = \dot{t}_{kl}dx^k dx^l + t_{kl}v^k{}_{;r}dx^r dx^r + t_{kl}dx^k v^l{}_{;r}dx^r$$

其中用了(1.10.12)．上式可写成

$$(2.6.3)\qquad D(d\sigma^2)/dt=\hat{t}^{kl}dx^k dx^l$$

其中 $\hat{t}_{kl}$ 称为应力通量，其定义为

$$(2.6.4)\qquad \hat{t}^{kl}\equiv\dot{t}^{kl}+t^l_{\cdot r}v^r{}_{;k}+t^k_{\cdot r}v^r{}_{;l}$$

从(2.6.3)的组成显见 $\hat{t}$ 在空间参照架作刚性运动时是不变的．对(2.6.3)取更高阶的物质导数可以得到更高阶的应力通量．所得的结果方程类似于1.10节中所得者．

不幸的是，应力通量在空间参照架刚性运动中具有不变性这一判据不适合以唯一的方式引进应力通量．还存在着许多同样适宜的形式．比如，采用

$$(2.6.5)\qquad T^{KL}=JX^K{}_{,k}X^L{}_{,l}t^{kl}$$

就可以引进其他的形式．这个张量的物质导数，根据(1.10.14)和(1.10.19)，可以写成为

$$(2.6.6)\qquad \dot{T}^{KL}=-JX^K{}_{,k}X^L{}_{,l}\check{t}^{kl}$$

其中

$$(2.6.7)\qquad \check{t}^{kl}\equiv\dot{t}^{kl}+t^{kr}v^l{}_{;r}+t^{rl}v^k{}_{;r}-t^{kl}v^r{}_{;r}$$

上式和(2.6.4)相差右端最后一项．其他形式是可能的．其实我们总可以在(2.6.7)的右端加上含有 $\pm t^{kr}d_{rl}$ 的项以得到应力通量的新表达式，因为这一项在刚性转动下是不变的．于是以下所有形式都可用作为应力通量：

(2.6.8)

$$\hat{t}^{kl} = \dot{t}^{kl} + t^{rl}v_{r;}{}^{k} + t^{kr}v_{r;}{}^{l}$$

$$\hat{\hat{t}}^{kl} = \dot{t}^{kl} - t^{rl}v^{k}{}_{;r} - t^{kr}v^{l}{}_{;r}$$

$$\hat{\hat{t}}^{kl} = \dot{t}^{kl} - t^{rl}v^{k}{}_{;r} + t^{kr}v_{r;}{}^{l}$$

$$\hat{\hat{t}}^{kl} = \dot{t}^{kl} + t^{rl}v_{r;}{}^{k} - t^{kr}v^{l}{}_{;r}$$

还可能有其他的方式.

第三章　连续统热力学

3·1　本章的范围

本章涉及连续统热力学的讨论．热力学涉及能量平衡和熵不等式所引起的对物体反应的限制．没有这种限制，用数学表征的理想物体也许不代表真实的物体，所预测的反应可能不真实．在3.2节中介绍了热学力学过程和热力学过程，并表述了物质的反应．在3.3节中推导了能量平衡和熵不等式的各种形式．自3.4节开始，我们探讨局部熵不等式所引起对各类物质的限制．在3.5节所讨论受这些限制的过程可能有时不连续．因此，引进两个概念：局部线性延拓和常延拓，前者对不连续过程的讨论是重要的，而后者对热力平衡是重要的．有了这些工具以及某些基本公理，在3.6节讨论带记忆的简单物质的热力学，探讨了这些物质趋于平衡和弛豫性质．同样的探讨，但更为详细，且对反应函数采取不同的连续性要求，将以后在第二部分第一章① 中对热粘弹性物质作出．这里的目标更为普遍和数学化，并没有对热学力学物质特别采用合适的独立变量（如变形梯度，温度以及温度梯度史，等等）．

在3.7和3.8节讨论根据翁萨格力和通量的热力学．

这里所讲的连续统热力学是不可逆的和非线性的．它完

① 译注　本丛书第八分册第1章．

全没有考虑或照顾小变化、准平衡过程、可逆性等等，而这些在经典热力学中往往是模糊和不确定的．这里所发展的思想大部分是近十来年的研究成果，并且把热力学放到和连续统力学其他部分同样的严格水平．这些思想还要进一步推广以概括非简单物质的理论(例如混合物理论和非局部理论)，见本书第三卷①．

3.2 热力学过程

经典热力学研究的是物体的热学性质，物体由有限个静止或均匀运动的部分所组成．在每一时刻对物体整体指定了一个数② θ，称为**温度**．这个数量测物体在给定时刻的冷热程度．物体的温度用温度计或其他仪器量测．实验证实，没有哪个物体能够冷却到低于某一个极限．如把这个极限选为零点，则这样的温标称为**绝对**温标．于是我们把

$$\theta>0, \quad \inf \theta=0$$

作为一个公设．在分子运动论中，温度当作是各粒子内在动能在某种意义上的平均值．如接受这种解释，那么正的质量就意味着正的温度．

在连续统力学中，这启发我们引进物质点 $\boldsymbol{X}$ 处时刻 t 的 $\theta(\boldsymbol{X},t)$，作为 $\boldsymbol{X}$ 在 t 时的绝对温度．

---

① 译注　原著第三卷和第四卷，译文是本丛书第十三分册、第十六分册．

② 译注　原文是"一个非负的正数"．

定义 1 一个热学力学过程 (*thermomechanical process*) 由一对函数

$$(3.2.1) \qquad \theta(\boldsymbol{X},t), \quad x(\boldsymbol{X},t)$$

所定义，它们与每一时刻物体中每一点 $\boldsymbol{X}$ 相联系，且满足

$$(3.2.2) \qquad \theta(\boldsymbol{X},t)>0, \quad \det x^k{}_{,K}(\boldsymbol{X},t)>0$$

当热学力学过程为已知时，物体中全部点在所有时间的运动和温度为已知．所以从原则上来说，通过 2.4 节所推导的平衡定律，我们应能够计算出外载荷和热量；或者反过来，当外载荷为已知时，应该能够确定相应的热学力学过程．可惜的是这两个计划一个也无法完成，因为四个平衡定律（质量、动量、动量矩、能量）和一个熵不等式含有太多的变量（ρ, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{q}$, ε, η, $\boldsymbol{s}$）．这不足为怪，因为物体的本性还没有加以说明．我们得以某种方式指明所讨论的是气体、流体、固体、还是混合物，并指明物体的性质．如过程(3.2.1)已知，ρ 可以由质量守恒方程决定：

$$(3.2.3) \qquad \rho_0=\rho(III_C)^{\frac{1}{2}}$$

于是我们可以从我们的名单中取消变量 ρ．其余的变量 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{q}$, ε, η, 和 $\boldsymbol{s}$ 依赖于物体的性质．这些变量之间所存在的关系以及热学力学过程 (3.2.1)， 构成第二部分① 第 1 章将讨论的本构方程．那里的讨论说明，对一大类物质(材料)都成立的一般本构方程组的形式是

① 译注 本丛书第八分册．

(3.2.4)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t}(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\boldsymbol{t}}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),\theta(\boldsymbol{X}',t')] \\
\boldsymbol{q}(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\boldsymbol{q}}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),\theta((\boldsymbol{X}',t')] \\
\varepsilon(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\varepsilon}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),\theta(\boldsymbol{X}',t')] \\
\eta(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\eta}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),\theta(\boldsymbol{X}',t')] \\
\boldsymbol{s}(\boldsymbol{X},t) &= \boldsymbol{s}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),\theta(\boldsymbol{X}',t')]
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 是一个张量值泛函，定义在物体所有点 $\boldsymbol{X}'$ 和所有过去 $t'\leqslant t$ 时刻的热学力学过程上。因而，在 $\boldsymbol{X}$ 处 t 时的应力由物体所有点所有过去时刻的运动和温度所确定。类似地，$\hat{\boldsymbol{q}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 是矢量值泛函，而 $\hat{\varepsilon}$ 和 $\hat{\eta}$ 是标量值泛函。显然可见，如果知道本构方程，把它们代入平衡定律(2.4.13)，(2.4.36)和(2.4.43)，我们得到适当个数的方程，原则上说，它们可以确定 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ 和 $\theta(\boldsymbol{X},t)$。

定义 2　满足局部平衡律和本构方程的每一个热学力学过程 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ 和 $\theta(\boldsymbol{X},t)$ 称为一个热力学过程(*thermodynamical process*)。

热力学过程还要服从熵不等式(2.4.49)。显然这个不等式进一步限制了热力学过程。

定义 3　热力学过程称为容许的，当且仅当它不违背熵不等式(2.4.49)。

这提示我们，在决定了所有物体所能经历的热力学过程以后，要对它们进行检验，看它们是否违背熵不等式。如果违背了，就不要它们；如不违背，就打个好分数并列入名单。要准备一张完整的名单通常是不可能的，因为它需要寻出平

衡方程的所有解．此外，刚开始时我们不知道本构方程的形式是否在某种物理根据上可接受．可以克服这种困难的另一种设想是，用熵不等式这个容许性条件对本构方程加以限制．这就是说，我们对所有独立的热力学过程检查是否满足熵不等式以找到对于反应泛函 $\hat{t},\hat{q},\hat{\varepsilon},\hat{\eta}$ 和 $\hat{s}$ 的限制．这样一个办法排除了物体中可能发生的某些热力学过程，这种过程的反应泛函① 比熵不等式所限制的那些泛函更为普遍．在这种意义上，我们对物体的性质加以限制，而不是对热力学过程限制．这是热力学现代应用的主要出发点．它将在以下各节详述．

当前热力学还没有发展到足以包括象（3.2.4）那样一般的本构方程．对局部理论说也没有必要考虑这样大范围的问题．首先，全部决定性物理所根据的决定性原理来说，运动和温度迄今为止的过去历史决定着现在的反应(参见第八分册)．因而，反应泛函中只含有迄今为止的历史，即

$$(3.2.5)\quad t(X,t)=\hat{t}[x(X',t-\tau')\theta(X,t-\tau)],0\leqslant\tau'<\infty$$

此外，本卷② 所讨论的局部理论和简单物质只要求考虑在物质点 X 的无限小邻域的运动和温度．这意味着我们可以把 $\hat{t}$ 中的宗函数(*argument function*)用 $x(X',t-\tau')$ 和 $\theta(X',t-\tau')$ 在 X 处泰勒级数展开式中头两项代替，即

$$(3.2.6)\qquad t(X,t)=\hat{t}[x(t-\tau'),x_{,K}(t-\tau'),\theta(t-\tau'),\theta_{,K}(t-\tau'),X]$$

---

① 译注　原文是反应函数．

② 译注　本丛书第七分册到第十二分册．

式中的宗函数中已略去不写$\boldsymbol{X}$因为$\boldsymbol{t}$不再是物体所有点X上的泛函，例如，我们写出

$$x(X,t-\tau')\equiv x(t-\tau')\equiv x^t(\tau') \tag{3.2.7}$$

所有依赖记忆的简单物质包括在(3.2.6)形式的本构方程中。弹性固体，粘性流体，各种粘弹性物质都是(3.2.6)的特殊情况(参见第八分册)。为了热力学上的考虑，我们有时将把$(x,x_{,K})$简写为F，把$(\theta,\theta_{,K})$简写为G，例如

$$t(t)=\hat{t}[F^t(\tau'),G^t(\tau')] \tag{3.2.8}$$

并且记住，$\boldsymbol{X}$也作为参数进入这些方程。

3.3 热力学第一和第二定律

热力学第一定律是能量守恒定律。这定律的全局形式是

$$\dot{\mathscr{E}}+\dot{\mathscr{K}}=\mathscr{W}+\mathscr{Q}\sum_{\alpha}\mathscr{U}_{\alpha} \tag{3.3.1}$$

其中$\mathscr{E}$是物体总内能，$\mathscr{K}$是总势能，$\mathscr{W}$是外载荷的能量①，$\mathscr{Q}$是热能，而$\mathscr{U}_{\alpha}$是可能出现的其他能(例如电磁能、化学能等)。本卷②只涉及简单物质组成的热学力学物质，认为不出现电磁能和化学能。其实，我们设所有$\mathscr{U}_{\alpha}=0$。在简单物质连续统力学中，忽略应力偶和各阶体力偶，我们有以下表达式：

---

① 译注　应为能量的时率或功率。紧接着的热能和其他能也是指能量的时率。

② 译注　参见120页译注②。

(3.3.2)

$$\mathscr{E}=\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho\varepsilon dv,\quad \mathscr{K}=\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho g_{kl}v^k v^l dv$$

$$\mathscr{W}=\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho f_k v^k dv+\oint_{\mathscr{S}-\sigma}t^{kl}v_l da_k$$

$$\mathscr{Q}=\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho h dv+\oint_{\mathscr{S}-\sigma}q^k da_k$$

以(3.3.2)代入(3.3.1)得局部平衡律(2.4.41)和(2.4.42)。

(3.3.3)

$$\rho\dot{\varepsilon}-t^{kl}v_{l;k}-q^k{}_{;k}-\rho h=0\quad(\text{在}\mathscr{V}-\sigma\text{内})$$

$$\left[\left(\rho\varepsilon+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)(v^k-\nu^k)-t^{kl}v^l-q^k\right]n_k=0$$

(在σ上)

这些组成连续统热力学第一定律。

热力学第二定律，以全局形式表示时，由

(3.3.4) $$\dot{H}-M\geqslant 0$$

给出，其中H是物体的总熵，而M是熵通量和熵源的总和。在连续统物理中我们有

(3.3.5) $$H=\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho\eta dv,$$

$$M=\int_{\mathscr{V}-\sigma}\rho b dv+\oint_{\mathscr{S}-\sigma}s^k da_k$$

这些代入(3.3.4)后，导致2.4节中所得局部律[例如(2.4.49)和(2.4.50)]：

(3.3.6) $\rho\gamma \equiv \rho\dot{\eta} - s^k{}_{;k} - \rho b \geqslant 0$（在$\mathscr{V}-\sigma$内）

(3.3.7) $[\rho\eta(v^k - \nu^k) - s^k]n_k \geqslant 0$ （在σ上）

对2.4节讨论的熵不等式，我们并未提供任何理由．在经典热力学中，它是这样论证的：第一定律（3.31）给出热转换为能以及能转换为热的表达式．功和能总可以转换成热，但是不作功而要热转换为能，其时率有一个先验的上确界，于是有

(3.3.8) $\mathscr{Q} \leqslant \mathscr{Q}_0$

它等价于

(3.3.9) $\dot{\mathscr{E}} + \dot{\mathscr{K}} - \mathscr{W} \leqslant \mathscr{Q}_0$

因为温度在物体各处是均匀的，且$\theta>0$，我们定义熵为

(3.3.10) $H \equiv \int_{t_0}^{t} (\mathscr{Q}_0/\theta)dt$

从而有$\dot{H} = \mathscr{Q}_0/\theta$，和

(3.3.11) $\dot{H} \geqslant \mathscr{Q}/\theta$，$\dot{\mathscr{E}} + \dot{\mathscr{K}} - \mathscr{W} \leqslant \theta\dot{H}$

为了得到熵不等式(3.3.4)，只要认为$\mathscr{Q}/\theta = M$就可以了．

显然，(3.3.10)中所引进的θ可能不同于上面假设的θ，除非在θ在体内各处均匀的特殊情况．因而合理的办法是把$\mathscr{Q}/\theta$当作为由(3.3.5)所表达的一个完全新的源和通量的积分．于是，在这种意义下，在热通量和热源($\boldsymbol{q}$, h)以及熵通量和熵源($\boldsymbol{s}$,b)之间的关系式

(3.3.12) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{q}/\theta$，$b = h/\theta$

可能只在特殊情况下才成立。为什么会导致(3.3.4)和(2.4.47)那样形式的熵不等式，其理由现已清楚。

绝对温度 θ，熵源 b 和熵通量 s 是颇为任意的，除非我们对 s 假设一个本构理论，且认为 h 限定于是外部效应。熵源 b 的性质也可随意取。现把函数 b 换成为一个新函数 h/θ，因为对 θ 除了 $\theta>0$ 没有规定任何其他性质。于是，可令

$$(3.3.13) \qquad b=h/\theta$$

这相当于一个未知函数，即 b，用另一个未知函数，即 h/θ，来代替，这里 h 已知而 θ 则不是。当然，我们不能同时取 $s=q/\theta$，因为 s 和 q 都是由本构方程给出的。也可认为，(3.3.13)相当于引进能源 b，而 h 和 θ 是已知的。换句话说，它可看成当 θ 事先引进时 b 的定义，或者是 θ 的定义而 b 事先引进。在这意义上，熵源同 h/θ 具有同样的任意性①。

以(3.3.13)代入(3.3.6)并在(3.3.6)和(3.3.3)$_1$ 之间消去 h，得

(3.3.14)

$$\rho\left(\dot{\eta}-\frac{\dot{\varepsilon}}{\theta}\right)+\frac{1}{\theta}t^{kl}v_{l;k}+\frac{1}{\theta^2}q^k\theta_{,k}\geqslant 0$$

其中

$$(3.3.15) \qquad p^k\equiv(q^k/\theta)-s^k$$

---

① 原注 *Müller* (1971)引进一个更普遍的熵源 $b=h/\phi$，其中 ϕ 是一个本构函数($1/\phi$ 称为冷度函数)。在这样的普遍提法中，对热传导所得的偏微分方程可能是双曲类型的，因而说明热扰动可能以有限速率传播(第二声效应)(参见*Müller* 1971；*Green* 和 *Lindsay*, 1972；*Eringen* 和 *Suhubi*, 1973)。

(3.3.14)的结果可以换成另一种可用的形式，如果引进亥姆霍兹自由能函数ψ如下

$$(3.3.16) \qquad \psi \equiv \varepsilon - \theta\eta$$

在它和(3.3.14)之间消去ε，得

(3.3.17)

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\psi}+\dot{\theta}\eta)+\frac{1}{\theta}t^{kl}v_{l;k}+p^{k}{}_{;k}+\frac{1}{\theta^{2}}q^{k}\theta_{,k}\geqslant 0$$

不等式(3.3.14)和(3.3.17)是熵不等式最后的形式。它们称为克劳修斯-杜姆不等式①(*Clausius-Duhem inequality*)。现在可叙说连续统热力学的基本目标如下：

决定本构泛函(2.2.4)的形式，使得克劳修斯-杜姆不等式(3.3.14)或(3.3.17)对于所有独立的热力学过程都不被违背。

这个计划提出几项任务：

(i) 把本构方程约化成为不违背熵不等式的形式；

(ii) 推导出物体处于特殊状态(例如平衡)的条件；

(iii) 已知外部(效应例如体载荷、热源)及/或约束(例如表面位移、表面牵引力)及初始条件，决定支持它们的热力学过程。

热力学第二定律现可叙述为：

熵公理　克劳修斯-杜姆不等式作为公设对于所有独

---

① 原注　这些不等式和常用不等式之间的差别在于这里存在着附加项$p^{k}{}_{;k}$。这一项是*Müller* (1967)引进的，并在以后的出版物中引用。但是*Müller*在更后的出版物中干脆扔去熵源h/θ。熵的一般不等式(3.3.6)是由作者最早引进的(见*Eringen*，1965，1967，4.6节；又见*Eringen*和*Ingram*，1965，其中它应用于混合物理论)。

立的热力学过程成立。

因而，不等式(3.3.14)或(3.3.17)可认为是对本构方程(3.2.4)形式所加的限制，设本构泛函中所出现的宗函数作所有独立的变分。这些宗函数当然还有由其他物理的或几何的考虑所引起的其他限制(例如 $\theta>0, \det x^k{}_{,K}>0$)，对本构泛函可能还有各种连续性要求。本章其余部分以及第八分册将对这些要求和熵不等式的应用作进一步的讨论。

最后，为了今后的应用，我们下面给出克劳修斯-杜姆不等式在物质参照架中表达的其他两个表达式。它们可由在(3.3.14)或(3.3.17)中采用(2.4.38)，(2.4.46)和(2.4.51)而得到，也可以由(3.3.13)代入(2.4.52)后再在它和(2.4.44)之间消去 h 而得到。于是有

(3.3.18)

$$\rho_0\left(\dot{\eta}-\frac{\dot{\varepsilon}}{\theta}\right)+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{T}^K\cdot\boldsymbol{v}_{,K}+P^K{}_{;K}+\frac{1}{\theta^2}Q^K\theta_{,K}\geqslant 0$$

(3.3.19)

$$-\frac{\rho_0}{\theta}(\dot{\psi}+\dot{\theta}\eta)+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{T}^K\cdot\boldsymbol{v}_K+P^K{}_{;K}+\frac{1}{\theta^2}Q^K\theta_{,K}\geqslant 0$$

其中

(3.3.20) $$P^K\equiv(Q^K/\theta)-S^K$$

3.4 对某些简单物质的热力学限制

本节讨论由于克劳修斯-杜姆不等式而引起的对某些简单物质的限制。我们选了五个例子以显示熵公理的力量。为

简单起见，设坐标 X^K 和 x^k 是直角坐标.

3.4.1 刚性物质

一种非常特殊情况的物质可以用（3.2.4）式那样的方程描述，且其中的泛函就是函数，热学力学状态仅是物质点 X 在 t 时的运动 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ 和温度 $\theta(\boldsymbol{X},t)$，即

$$
(3.4.1)\qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t)&=\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x},\theta)\\
\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X},t)&=\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x},\theta)\\
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},t)&=\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\theta)\\
\psi(\boldsymbol{X},t)&=\hat{\psi}(\boldsymbol{x},\theta)\\
\eta(\boldsymbol{X},t)&=\hat{\eta}(\boldsymbol{x},\theta)
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 是第一皮奥拉-基尔霍夫应力，其分量 T^{Kl} 由(2.4.28)$_1$给出，而 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 分别由(2.4.46)和(3.3.20)给出。这里 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 是 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ 和 $\theta(\boldsymbol{X},t)$ 的张量值函数，$\hat{\boldsymbol{Q}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 是它们的矢量值函数，而 $\hat{\psi}$ 和 $\hat{\eta}$ 是它们的标量函数。在(3.2.6)的形式中，$\boldsymbol{x}_{,K}$ 和 $\theta_{,K}$ 并不出现，现在 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 和 θ 的一个函数（而不是一个泛函）.我们假设 $\hat{\psi}$ 和 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 对 x^k 和 θ 可微，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ 和 $\theta(\boldsymbol{X},t)$ 有对其自变量的偏导数.

以(3.4.1)代入(3.3.19)我们得

(3.4.2)

$$
-\frac{\rho_0}{\theta}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}+\eta\right)\dot{\theta}-\frac{\rho_0}{\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x^k}\dot{x}^k+\frac{1}{\theta}\hat{\boldsymbol{T}}^k\cdot\boldsymbol{v}_{,K}
$$

$$
+\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial x^k}x^k{}_{,K}+\left(\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial\theta}+\frac{Q^K}{\theta^2}\right)\theta_{,K}\geqslant 0
$$

这个不等式对于变量组

(3.4.3) $$\dot{\theta},\dot{x}^k,v_{,K},x^k_{,K},\theta_{,K}$$

是线性的，因为这些变量的系数只依赖于 x^k 和 θ 而不依赖于(3.4.3)组中任一个变量．不论 x^k 和 θ 在 $\boldsymbol{X}$ 和 t 的值是什么，我们可以任意指定（3.4.3）组中各量的值．然而，这个不等式既然对这些量是线性的，不等式的左端①不能维持其正负号不变，除非(3.4.3)组中各量的系数均为零，即

(3.4.4)

$$\eta=-\partial\hat{\psi}/\partial\theta,\quad \partial\hat{\psi}/\partial x^k=0,\quad \hat{T}^K=0$$

$$\partial\hat{P}^K/\partial x^k=0,\quad (\partial P^K/\partial\theta)+(1/\theta^2)\hat{Q}^K=0$$

反之，如(3.4.4)满足，则不违背不等式(3.4.2)．于是我们证明了本构方程(3.4.1)必须是以下形式：

(3.4.5)

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t)=0,\ \psi(\boldsymbol{X},t)=\hat{\psi}(\theta),\quad \eta=-\partial\hat{\psi}/\partial\theta$$

$$Q^K(\boldsymbol{X},t)=-\theta^2\partial\hat{P}^K/\partial\theta,\quad \hat{P}^K=\hat{P}^K(\theta)$$

这些限制无疑十分苛刻．如物质由（3.4.1）式的一般本构方程描述，则物质中应力为零，且其熵可以由仅仅依赖于 $\theta(\boldsymbol{X},t)$ 的自由能导出．这是一种刚性的材料．

往后我们将看到，本构泛函在空间参照架作刚性平移和转动时必须具有不变形式．由于这原因，可以消除反应泛函对 x^k 的依赖性．值得注意的是即使没有这种附加的限制，克劳修斯-杜姆不等式说明 ψ 和 $\boldsymbol{P}$ 不能依赖于 x^k．再进一步考

① 译注 “的左端”系译者加的．下同．

虑 Q^K 的形式，假设在某一种状态中(比如未变形态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}$ 中)，热流为零。在这假设下由(3.4.5)可得 $\hat{P}^K=$ 常量，因而在所有时间 $\boldsymbol{Q}=0$。可见这种物质是**刚性的**，且**非导热的**。

3.4.2 弹性固体

弹性固体可由以下形式的一组本构方程定义①：

$$
\begin{aligned}
(3.4.6)\qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{,K},\theta)\\
\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{,K},\theta)\\
\psi(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{,K},\theta)\\
\eta(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{,K},\theta)\\
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{,K},\theta)
\end{aligned}
$$

注意这是(3.2.6)的一种很特殊的情况，其中反应函数只依赖于在 $\boldsymbol{X}$ 和 t 的 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$，$\boldsymbol{x}_{,K}(\boldsymbol{X},t)$ 和 $\theta(\boldsymbol{X},t)$，且 $\boldsymbol{T}$ 是这些变量的函数而不是它们的泛函②。我们还假设，反应函数具有对它们自变量的一阶连续偏导数，且宗函数 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{,K}$，和 θ 都是可微的。以(3.4.6)代入(3.3.19)，得

(3.4.7)

$$
-\frac{\rho_0}{\theta}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\theta}+\eta\right)\dot{\theta}-\frac{\rho_0}{\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x^k}\dot{x}^k+\frac{1}{\theta}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^K-\rho_0\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\boldsymbol{x}_{,K}}\right)
$$

① 原注　反应泛函的宗函数 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{,K}$ 和 θ 只依赖于 $\boldsymbol{X}$ 和 t；这里不明写了。如它们依赖于 $\boldsymbol{X}'$ 和 t'，则将写成(3.2.4)中那样，或者用 $\boldsymbol{t}=\hat{\boldsymbol{t}}[\boldsymbol{x}(\cdot),\theta(\cdot)]$ 表示。

② 原注　弹性固体包括在"依赖于梯度的物量"(*gradient-dependent materials*)这一般种类内，它将在第二部分(译注：第八分册)第1章讨论。

$$\cdot \boldsymbol{v}_{,K} + \frac{\partial \hat{P}^K}{\partial x^k} x^k{}_{,K} + \frac{\partial \hat{P}^K}{\partial x^k{}_{,L}} x^k{}_{,LK}$$

$$+ \left(\frac{\partial \hat{P}^K}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \hat{Q}^K \right) \theta_{,K} \geqslant 0$$

检查一下这个不等式，又发现这个不等式对变量 $\dot{\theta}, \mathring{x}^k, \boldsymbol{v}_{,K}, x^k{}_{,LK}$ 和 $\theta_{,K}$ 是线性的。此外，这些变量可以随意变化。因而这个不等式的左端保持其正负号的必要且充分条件是其系数均为零①，即

(3.4.8)

$$\eta = -\partial\hat{\psi}/\partial\theta, \quad \partial\hat{\psi}/\partial x^k = 0$$

$$\boldsymbol{T}^K = \rho_0 \partial\hat{\psi}/\partial \boldsymbol{x}_{,K}, \quad (\partial\hat{P}^K/\partial x^k{}_{,L}) + (\partial\hat{P}^L/\partial x^k{}_{,K}) = 0$$

$$(\partial\hat{P}^K/\partial\theta) + (\hat{Q}^K/\theta^2) = 0$$

以及

(3.4.9) $$(\partial\hat{P}^K/\partial x^k) x^k{}_{,K} \geqslant 0$$

由(3.4.8)$_2$显然 ψ 不依赖于 x^k。方程(3.4.8)$_4$可积分成为

(3.4.10)

$$\hat{P}^K = \Omega_k^{KL}(\boldsymbol{x},\theta) x^k{}_{,L} + \rho_0{}^K(\boldsymbol{x},\theta), \quad \Omega_k^{KL} = -\Omega_k^{LK}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}^{KL}$ 和 $\mathbf{p}_0{}^K$ 都与 $\boldsymbol{x}_{,K}$ 无关。以此代入(3.4.9)，可知这个不等式不能对所有独立的 $x^k{}_{,K}$ 的变化都成立，除非②

① 原注 因 $x^k{}_{,LK} = x^k{}_{,KL}$，仅是 $\partial P^K/\partial x^k{}_{,L}$ 的对称部分等于零。

② 译注 原文(3.4.11)第一式无"$=0$"。

(3.4.11) $\Omega_k^{KL}=\Omega^{KL}{}_{,k}=0,\quad \partial P_0{}^K/\partial x^k=0$

设自然状态时热量为零，即当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}$ 时 $\boldsymbol{Q}=0$，则由(3.4.8)$_5$可见$\hat{P}^K$与温度θ无关．其次我们记得(3.4.8)$_3$同时要满足平衡定律．平衡律中唯一可能为这种形式所违背的是动量矩定律，它要求应力张量为对称．于是必须附加上条件

(3.4.12) $(\partial\hat{\psi}/\partial x^{[l}{}_{,K})x^{k]}{}_{,K}=0$

以后将看到，上述表达式表明$\hat{\psi}$只可能通过应变量测C_{KL}与$x^k{}_{,K}$有关．这一点连同(3.4.8)$_2$和(3.4.12)实际上表明，$\hat{\psi}$在空间参照架的任何刚性运动中是不变的．

这些再次演示了克劳修斯-杜姆不等式强有力的限制作用．把所有结果收集起来，可见(3.4.6)要成为热力学上容许的，必须且只须它们具有特殊的形式如下：

(3.4.13)

$$t^k{}_l=\rho(\partial\hat{\psi}/\partial x^l{}_{,K})x^k{}_{,K}$$

$$q^K=0$$

$$\psi=\hat{\psi}(\boldsymbol{x}_{,K},\theta),\quad (\partial\hat{\psi}/\partial x^{[l}{}_{,K})x^{k]}{}_{,K}=0$$

$$\eta=-\partial\hat{\psi}/\partial\theta,$$

$$P^K=\Omega^{KL}{}_{,k}(\boldsymbol{x})x^k{}_{,L}+P_0{}^K(\boldsymbol{x}),\qquad \Omega^{KL}{}_{,k}=-\Omega^{LK}{}_{,k}$$

于是，应力和熵可以从自由能函数$\hat{\psi}$导出，而这个$\hat{\psi}$与$\boldsymbol{x}$无关；热量为零，而熵$S^K=-P^K$具有(3.4.13)$_6$那样的特殊形式．此外，热力学上的限制提出了自由能在空间参照架刚

性运动中必须有不变性。这种不变性要求如果施之于P^K，将进一步限制$\hat{P}^K$的形式(参见第八分册1.5节)。

3.4.3 刚性导热体

现考虑一类物质，其本构方程的形式为

$$
(3.4.14)\qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x},\theta,\theta,_K)\\
\boldsymbol{Q}(X,t) &= \hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x},\theta,\theta,_K)\\
\psi(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\psi}(\boldsymbol{x},\theta,\theta,_K)\\
\eta(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\eta}(\boldsymbol{x},\theta,\theta,_K)\\
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},t) &= \hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\theta,\theta,_K)
\end{aligned}
$$

这组也包括在主本构方程(3.2.6)之中。假设克劳修斯-杜姆不等式(3.3.19)中显然要求的通常可微性条件都具备，我们有

(3.4.15)

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\rho_0}{\theta}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}+\eta\right)\dot{\theta}-\frac{\rho_0}{\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x^k}\dot{x}^k-\frac{\rho_0}{\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta,_K}\dot{\theta},_K\\
&+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{T}^k\cdot\boldsymbol{v},_K+\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial x^k}x^k,_K+\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial\theta,_L}\theta,_{LK}\\
&+\left(\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial\theta}+\frac{1}{\theta^2}Q^K\right)\theta,_K\geqslant 0
\end{aligned}
$$

显见这不等式对变量

$$\dot{\theta},\dot{x}^k,\theta,_K,\boldsymbol{v}x,_k{}^k,_K\theta,_{LK}$$

是线性的. 所以，要这不等式(左端)在这些独立变量任意变化时维持其正负号，其必要且充分条件是

(3.4.16)

$$\eta=-\partial\hat{\psi}/\partial\theta,\quad \partial\hat{\psi}/\partial x^k=0,\quad \partial\hat{\psi}/\partial\theta_{,K}=0$$

$$\hat{\boldsymbol{T}}^K=0,\quad \partial\hat{P}^K/\partial x^k=0,\quad (\partial\hat{P}^K/\partial\theta_{,L})+(\partial\hat{P}^L/\partial\theta_{,K})=0$$

以及

$$(3.4.17)\qquad \left(\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial\theta}+\frac{1}{\theta^2}Q^K\right)\theta_{,}{}^{k}\geqslant 0$$

由(3.4.16)可见 $\hat{\psi}$ 不依赖于 $\boldsymbol{x}$，和$\theta_{,K}$，而 $\hat{P}^K$不依赖于x^k. 此外，$\hat{P}^K$ 是 $\theta_{,K}$ 的线性式，其特殊形式为

(3.4.18)

$$\hat{P}^K=\Omega^{KL}(\theta)\theta_{,L}+P_0{}^K(\theta),\quad \Omega^{KL}=-\Omega^{LK}$$

如 Q^K 是 $\theta_{,K}$ 的连续函数，则由(3.4.17)必须还有

(3.4.19)

$$\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial\theta}+\frac{1}{\theta^2}\hat{Q}^K=0,\qquad 当\ \theta_{,K}=0\ 时$$

这是因为当 $\theta_{,K}$ 稍大于零时 $\theta_{,K}$ 的系数必须为正而当 $\theta_{,K}$ 稍小于零时这系数必为负. 根据 Q^K 在 $\theta_{,K}=0$ 处的连续性，(3.4.19)式必成立. 现设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}$ 时 Q^K 等于零，因为 $\hat{P}^K$ 与 $\boldsymbol{x}$ 无关，必须有 $\partial\hat{P}^K/\partial\theta=0$. 收集这些结果，我们有

$$(3.4.20)\qquad \begin{cases}\boldsymbol{T}=0\\ \psi=\hat{\psi}(\theta),\quad \eta=-d\hat{\psi}/d\theta\\ P^K=\Omega^{KL}\theta_{,L}+P_0{}^K,\quad Q^K\theta_{,K}\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\Omega^{KL}=-\Omega^{LK}$ 和 $P_0{}^K$ 是常量。

于是，由(3.4.12)所代表的物质是刚性的导热物质，其热量矢量满足不等式$(3.4.20)_5$。此外，反应函数在参考架任何刚性运动中也是不变的。我们再次看清楚施加克劳修斯-杜姆不等式所引起的严厉限制。对这些材料，不等式$(3.4.20)_5$表达了通常所说的热量从热处流到冷处。

3.4.4 依赖时率的刚性物质

对3.4.1节讨论的刚性物质略作推广，使其本构函数也依赖于 $\dot{x}$ 和 $\dot{\theta}$，即物质的本构方程形式为

$$\psi=\hat{\psi}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\theta,\dot{\theta}) \tag{3.4.21}$$

以及 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{Q}$, η, 和 $\boldsymbol{P}$ 的类似表达式。

这仍然是(3.2.6)的特殊情形。为了看清这点我们略去 $\boldsymbol{x}_{,K}$ 和 $\theta_{,K}$，并把 $x(t-\tau')$ 和 $\theta(t-\tau')$ 换成为它们在 $\tau'=t$① 处泰勒级数的头两项。对 ψ 来说，这使 $\hat{\psi}$ 又成为其自变量的一个函数，而不是泛函。

采用克劳修斯-杜姆不等式(3.3.19)后得

(3.4.22)

$$\partial\hat{\psi}/\partial\dot{x}^k=0,\quad \partial\hat{\psi}/\partial\dot{\theta}=0,\quad T^K=0$$

$$\partial\hat{P}^K/\partial x^k=0,\quad \partial\hat{P}^K/\partial\dot{x}^k=0,\quad \partial\hat{P}^K/\partial\dot{\theta}=0$$

$$(\partial\hat{P}^K/\partial\theta)+(Q^K/\theta^2)=0$$

和

(3.4.23)

$$-\frac{\rho_0}{\theta}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}+\eta\right)\dot{\theta}-\frac{\rho_0}{\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x^k}\dot{x}^k\geqslant 0$$

---

① 译注 疑应为 $\tau'=0$。

从(3.4.22)可见 ψ 不依赖于 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 和 $\dot{\theta}$，而 $\hat{P}^K$ 不依赖于 $\boldsymbol{x}$，$\dot{\boldsymbol{x}}$ 和 $\dot{\theta}$，即

$$\psi=\hat{\psi}(\boldsymbol{x},\theta),\quad P^K=\hat{P}^K(\theta) \tag{3.4.24}$$

现设当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}$ 时 Q^K 等于零，于是 $\hat{P}^K=$ 常量. 因而一直有 $\dot{Q}^K=0$. 当 $\dot{\theta}=0$，(3.4.23)必须对 $\dot{x}^k$ 所有的值成立. 这意味着 $\partial\hat{\psi}/\partial x^k=0$. 因而 $\hat{\psi}$ 仅是 θ 的函数，(3.4.23)化成为

$$-\frac{\rho_0}{\theta}\left(\frac{d\psi}{d\theta}+\hat{\eta}\right)\dot{\theta}\geqslant 0 \tag{3.4.25}$$

如果令

$$\hat{\eta}=-(d\hat{\psi}/d\theta)+\hat{\eta}_D \tag{3.4.26}$$

上式给出

$$-(\rho_0/\theta)\,\hat{\eta}_D\dot{\theta}\geqslant 0 \tag{3.4.27}$$

如 $\hat{\eta}_D$ 对 $\dot{\theta}$ 连续，则可知当 $\dot{\theta}=0$ 时它也为零，即

$$\hat{\eta}_D(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\theta,0)=0 \tag{3.4.28}$$

综合起来，本构方程已简化为以下的形式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}=0,\quad \boldsymbol{q}=0,\quad \psi=\hat{\psi}(\theta) \\ \eta=-(d\hat{\psi}/d\theta)+\hat{\eta}_D(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\theta,\dot{\theta}),\ P^K=\text{常量} \end{cases} \tag{3.4.29}$$

其中 $\hat{\eta}_D$ 要满足

$$-(\rho_0/\theta)\eta_D\,\dot{\theta}\geqslant 0,\quad \eta_D(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\theta,0)=0 \tag{3.4.30}$$

这类物质是刚性的，且不导热，然而，它的熵不能单从自由

能导出。实际上，它具有受(3.4.30)限制的一个耗散熵①η_D。除了熵以外，反应函数对空间参照架刚性运动的不变性又是由应用克劳修斯-杜姆不等式而引起的，不需要把不变性当作单独的一条公设。

3.4.5 可压缩无粘性流体

考虑这样的本构方程，其中反应函数只依赖于 $\boldsymbol{x}$，θ，和 ρ^{-1}：

$$\psi=\hat{\psi}(\boldsymbol{x},\rho^{-1},\theta) \tag{3.4.31}$$

对这种物质，每一个使 $\rho>0$ 不变的参照架都是参照位形。这相当于一类流体。(3.4.31) 形式的本构方程可以作为 (3.4.6) 的一种特殊情形得到，设式中对 $\boldsymbol{x}_{,K}$ 的依赖性是通过 $\det x^k{}_{,K}$ 而不是通过 $x^k{}_{,K}$。于是克劳修斯-杜姆不等式给出

(3.4.32)

$$-\frac{\rho_0}{\theta}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}+\eta\right)\dot{\theta}-\frac{\rho_0}{\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x^k}\dot{x}^k-\frac{\rho_0}{\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\rho^{-1}}\dot{\overline{\rho^{-1}}}$$

$$+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{T}^K\cdot\boldsymbol{v}_{,K}+\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial x^k}x^k{}_{,K}+\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial\rho^{-1}}(\rho^{-1})_{,K}$$

$$+\left(\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial\theta}+\frac{1}{\theta^2}Q^K\right)\theta_{,K}\geqslant 0$$

由于质量守恒方程我们有

$$\dot{\overline{\rho^{-1}}}=-\rho^{-2}\dot{\rho}=\rho^{-1}v^k{}_{,k}$$

---

① 原注　耗散熵的概念是由 *Eringen* (1965) 在研究热学力学物质本构方程时提出的。

代入上面不等式，注意它对量 $\dot{\theta}$，$\dot{x}^k$，$v_{,K}$，$x^k{}_{,K}$，$(\rho^{-1})_{,K}$ 和 $\theta_{,K}$ 是线性的，我们找到使不等式(左端)对这些量任意独立的变化保持其正负号的必要且充分条件：

$$(3.4.33)\qquad \eta = -\partial\hat{\psi}/\partial\theta,\quad \partial\hat{\psi}/\partial x^k = 0$$

$$T^K{}_{,k} - \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\rho^{-1}} X^K{}_{,k} = 0$$

$$\partial\hat{P}^K/\partial x^k = 0,\ \partial\hat{P}^K/\partial\rho^{-1} = 0,\ (\partial\hat{P}^K/\partial\theta) + (\hat{Q}^K/\theta^2) = 0$$

由此可见 $\hat{\psi}$ 与 x^k 无关，$\hat{P}^K$ 不依赖于 x^k 和 ρ^{-1}。如果Q^K在某一 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 处为零，则由于$(3.4.33)_6$我们有 P^K = 常量，而 Q^K 在所有时间为零，综合起来，我们有

(3.4.34)

$$t^k_l = -\pi\delta^k_l,\quad \pi(\rho^{-1},\theta) \equiv -\partial\hat{\psi}/\partial\rho^{-1}$$

$$q^k = 0,\quad \hat{P}^K = \text{常量}$$

$$\psi = \psi(\rho^{-1},\theta)$$

$$\eta = -\partial\hat{\psi}/\partial\theta$$

因而这种物质中的应力只包括压力．热力学压力 π 和熵 η 可以由自由能函数 $\hat{\psi}$ 推导得，例如 $(3.4.34)_{2,6}$，其中 $\hat{\psi}$ 仅是 ρ^{-1} 和 θ 的函数．当然，这描述的是可压缩无粘性流体．

有关其他例子以及本构方程的一般理论，请读者参见第八分册第 1 章．

3.5 不连续热力学过程

有不少种类的自然现象中的热力学过程在空间上和在时

间上都是不连续的，例如，激波扫过物体时引起状态参数的不连续变化，冰投入水中，接触表面受到温度突然变化，外载荷或约束可能从物体突然卸除．这类过程不包括在上节所讨论的那类中，因为前面假设热力学过程以及本构函数两者都是可微的．但可证明，对过程作较弱的假设而对本构函数作略强一些的假设，同样的结果仍然成立．我们将假设 $\hat{\psi}$ 和 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 连续可微且 $\boldsymbol{T}^{K}$，$\boldsymbol{Q}$ 和 η 对其宗函数可微．热力学过程可能有空间和时间上有限个间断，然而它们只限于某一类 $\mathscr{C}$，这一类在局部线性延拓下必须是封闭的．

定义1　函数 $F(\boldsymbol{X},t)$ 在 $t=t_0$ 时物质点 $\boldsymbol{X}$ 处的（Λ，t_0）局部线性延拓的定义是（图3.5.1）

(3.5.1)

$$F_{\Lambda}(\boldsymbol{X},t)=\begin{cases}F(\boldsymbol{X},t), & \boldsymbol{X}\in B,\ -\infty<t<t_0\\ F(\boldsymbol{X},t_0)+(t-t_0)\Lambda(\boldsymbol{X}), & \boldsymbol{X}\in B,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau,\end{cases}$$

其中 $\Lambda(\boldsymbol{X})$ 是一可微函数，τ 是一正实数．

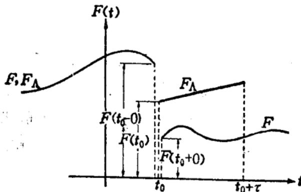


图 3.5.1　F 在 t_0 的局部线性延拓

函数 $F(\boldsymbol{X},t)$ 在 $t=t_0$ 时可能有间断点，但我们假定它在所有 $\boldsymbol{X}\in B$ 处连续，除了可能有可数个奇异面以外．在现在

的讨论中，假设 $F(\boldsymbol{X},t)$ 具有对 X^K 的连续偏导数。原规定在 $\mathscr{C}$ 内成立的热力学过程，也假设在它们的局部线性延拓上成立，至少是在 $t=t_0$ 附近成立，在 t_0 处也可能有除不掉的间断性。类 $\mathscr{C}$ 可能不包括甚至是在 t_0 每个十分小邻域内分段连续的任何过程。然而，克劳修斯-杜姆不等式在所有区域内成立，在这些区域内凡是不等式中出现的热力学过程都是可微的。热力学过程在局部线性延拓上所作假设放松了，就引起对本构函数附加的限制，即这些函数在耗散不等式出现的那些偏导数，在相应于$\mathscr{C}$中任何过程的每个状态中都必须是连续的。

现考虑3.4节(i)到(v)情况之一，例如(i)对 θ，$\boldsymbol{v}_{,K}$ 和$\theta_{,K}$ 在(3.5.1)所示定义域中的局部线性延拓 θ，$\boldsymbol{v}_{\Delta K}$，和 $\theta_{\Delta K}$，我们有①

$$\dot{\psi}=\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Lambda_{\theta}+\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\dot{x}^k,\quad \dot{\theta}=\Lambda_{\theta},\quad \boldsymbol{v}_{,K}=\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}K}$$

其中 Λ 和 Λ_K 的下标 θ 和 $\boldsymbol{v}$ 表明它们分别属于过程 θ和$\boldsymbol{v}_{,K}$。克劳修斯-杜姆不等式现为

(3.5.2)

$$-\frac{\rho_0}{\theta}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}+\eta\right)\Lambda_{\theta}-\frac{\rho_0}{\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x^k}\dot{x}^k+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{T}^K\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}K}$$

$$+\frac{\partial\hat{P}^K}{\partial x^k}x^k_{,K}+\left(\frac{\partial P^K}{\partial\theta}+\frac{1}{\theta^2}Q^K\right)\theta_{,K}\geqslant 0$$

其中 Λ_θ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}K}$ 的自变量是在 θ 和 $\boldsymbol{v}_{,K}$ 按(3.5.1)定义的线性延拓处计算得的。这个不等式在其中出现局部线性延拓的

① 原注 我们没有对 x^k 引进局部线性延拓，因为运动假设为连续的，不会间断；还假设 $x^k(\boldsymbol{X},t)$具有对 X^K 和 t 的连续偏导数。

定义域中成立。当从 t_0+ 方向接近 t_0 即当

$$t \longrightarrow t_0+0, \quad \boldsymbol{X} \in B$$

时不等式必须成立．因而(3.4.4)和(3.4.5)必须在 t_0+ 时成立，因为 Λ_θ，$\dot{x}^k$，Λv_K，$x^k{}_{,K}$ 和 $\theta_{,K}$ 都是任意实数．但既然这个状态可以是 $\mathscr{C}$ 中一个过程任取的，(3.4.4) 和 (3.4.5) 一般成立．

这个例子足以表明怎样用局部线性延拓的思想处理较弱的过程．为讨论平衡态还得补充一个概念，定义如下：

定义 2　　函数

$$F(\boldsymbol{X},t)\in\mathscr{C}, \quad t_0\in(-\infty,\infty)$$

的常延拓 $Ft_0\in\mathscr{C}$ 定义为

$$(3.5.3) \qquad F_{t_0}(\boldsymbol{X},t)=\begin{cases} F(\boldsymbol{X},t), & -\infty<t<t_0 \\ F(\boldsymbol{X},t_0), & t_0\leqslant t<\infty \end{cases}$$

这意味着在 $t\geqslant t_0$ 时 $F(\boldsymbol{X},t)$ 改成为与时间 t 无关。

对于一个已知函数 v（无论是标量、矢量或张量），我们用 v^+ 代表函数对每一个固定的 $\boldsymbol{X}$ 是常量：

$$(3.5.4) \qquad v^+(\boldsymbol{X},\lambda)=v(\boldsymbol{X}), \quad 0\leqslant\lambda<\infty$$

现讨论依赖记忆的物质的热力学．依赖记忆的物质的本构方程的一般形式是①

---

① 原注　这里 T,Q,P，和 Σ 代表 $T\equiv(\boldsymbol{T}^K,-\rho_0\eta)$，$Q\equiv(\boldsymbol{Q}/\theta)-\dot{\boldsymbol{P}}$，$P\equiv\theta\boldsymbol{P}$，$\Sigma\equiv\rho_0\psi$．对于粘弹性物质，$F^t(\cdot)$ 和 $G^t(\cdot)$ 相应于 $F^t(\cdot)\equiv[\boldsymbol{x}^t{}_{,K}(\cdot),\theta^t(\cdot)]$，$G^t(\cdot)\equiv[0,\theta^t(\cdot)]$．当然反应函数可能还与 $\boldsymbol{X}$ 有关(见第二章)．

$$(3.5.5)\quad \begin{aligned} T(t) &= \hat{T}[F^t(\tau'),\ G^t(\tau')],\\ Q(t) &= \hat{Q}[F^t(\tau'),\ G^t(\tau')],\\ P^K(t) &= \hat{P}^K[F^t(\tau'),\ G^t(\tau')],\\ \Sigma(t) &= \hat{\Sigma}[F^t(\tau'),\ G^t(\tau')], \end{aligned}$$

其中 $F^t(\tau')$ 和 $G^t(\tau')$ 是 $\mathscr{C}$ 类中子集 $\mathscr{D}$ 中的热力学过程．它们当然也依赖于 $\boldsymbol{X}$．对于现在时刻的值我们写为 $F=F^t(0)$ 和 $G=G^t(0)$。

现将以上论论的思想组织成为一组公设①．

公理 1　集合 $\mathscr{D}$ 在局部线性延拓下是闭的，即任给过程 (F,G)，在 $\mathscr{D}$ 中对每一个 $A\in H_F$ 和 $M\in H_G$ 及时刻 t_0 存在一个 (F,G) 的 (A,M,t_0) 局部线性延拓．

这里 H_F 和 H_G 是有限维内积空间，其内积 $A\cdot M$ 是任意两矢量的内积．这个公理所容许的过程，是庞大的一类，因为从某一个过程已达到的已知状态出发，可以派生出无限多个不同的过程．另外，它把理论限于那些既非光滑又非无序的那些过程．对于那些到 t 时为止一直无序的过程，泛函 $\hat{T}$, $\hat{Q}$, $\hat{P}$, 和 $\hat{\Sigma}$ 是对无限多个线性的（因而是光滑的）过程定义的．另一方面，一个到 t 时为止一直光滑的过程（比如说常过程）对今后无限多个过程仍然成立，这些过程甚至于在 t 时没有导数．所以，象斯托克斯粘性流体的性能就不包括在这公理之内．

---

① 原注　现在的组织以 *Gurtin* (1968) 的工作为根据．但他不考虑 P^K 的本构方程．他只是采用熵通量的经典表达式 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}/\theta$，因而他的 $P^K=0$．

公理 2 泛函Σ和 P^K 具有链式法则的性质，即

(3.5.6)

$$\frac{D}{Dt}\hat{\Sigma}(F^t,G^t)=D_F\hat{\Sigma}(F^t,G^t)\cdot\dot{F}$$
$$+D_G\hat{\Sigma}(F^t,G^t)\cdot\dot{G}^t+R\hat{\Sigma}(F^t,G^t)$$
$$\hat{P}^K{}_{,K}=D_F\hat{P}^K(F^t,G^t)F_{,K}+D_G\hat{P}^K(F^t,G^t)G_{,K}$$
$$+S_K\hat{P}^K(F^t,G^t)$$

这公理容许我们对某些在 t 时不可微的过程定义其反应泛函。于是，这类泛函是在不连续过程上作出定义的，但它们的值则是从右边连续的。这个公理也排除了那些涉及现时的时间导数的过程(如经典的粘性流体)。

公理 3 对每一过程(F,G)，泛函$\hat{T}(F^t,G^t),\hat{Q}(F^t,G^t),\hat{P}(F^t,G^t),D_F\hat{\Sigma}(F^tG^t)$，$D_G\hat{\Sigma}(F^t,G^t)$，$R\hat{\Sigma}(F^t,G^t)$，$D_F\hat{P}^K(F^t,G^t)$，$D_G\hat{P}^K(F^t,G^t)$，以及 $S_K\hat{P}^K(F^tG^t)$都是 t 的连续函数。

这些公理实际上保证了泛函 $D_F\hat{\psi},D_G\hat{\psi},R\Sigma$，$D_F\hat{P}^K,D_G\hat{P}^K$ 和 $S_K P^K$ 是唯一地确定的。其实，对于非常快的过程，物质的性能是弹性的。

如果$\dot{F}$和$\dot{G}$在 t 时有跳跃性不连续性，则有

(3.5.7)

$$[\dot{\Sigma}](t)=D_F\hat{\Sigma}(F^t,G^t)\cdot[\dot{F}](t)$$
$$+D_G\hat{\Sigma}(F^t,G^t)\cdot[\dot{G}](t)$$

其中$[\dot{\Sigma}](t)=\dot{\Sigma}(t^+)-\dot{\Sigma}(t^-)$等。可能把 $\hat{\Sigma}$推广到能包括

在 $D\ddot{\Sigma}/Dt$ 表达式中对 $\ddot{F}(t)$ 和 $\ddot{G}(t)$ 是线性的那些项．本构方程称为是热力学容许的，当且仅当它们服从熵不等式

$$(3.5.8) \qquad -\dot{\Sigma}(t)+T\cdot\dot{F}+Q\cdot\dot{G}+P^{K}{}_{;K}\geqslant 0$$

每当 $\dot{F}(t)$ 和 $\dot{G}(t)$ 存在且对 t 连续时．

公理 4　集合 $\mathscr{D}$ 在 F 和 G 的常延拓下是闭的．

公理 5　泛函 $\hat{\Sigma}$ 具有弛豫性质，即对已知过程 (F,G)，有

(3.5.9)

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\Sigma}(F^{t}_{t_0},G^{t}_{t_0})=\hat{\Sigma}[F(t_0)^{+},G(t_0)^{+}]$$

其中 (F_{t_0},G_{t_0}) 是 (F,G) 在 t_0 的常延拓．

公理 6　存在这样一区域 $\mathscr{D}_0\in\mathscr{D}$，其中 $\hat{\Sigma}$ 和 $\hat{P}^{K}$ 连续可微．

这六个公理适合于研究带记忆的物质的热力学和平衡过程，下面就讨论这些．

3.6 带记忆物质的热力学

定理 1　带记忆物质的本构方程 (3.5.5) 要在热力学上容许，必须且只须

$$(3.6.1) \qquad D_G\hat{\Sigma}=0,\quad T=D_F\hat{\Sigma}$$

$$D_F\hat{P}^{K}=0,\quad D_G\hat{P}^{K}=0$$

以及

(3.6.2)

$$-R\hat{\Sigma}(\overset{*}{F},\overset{*}{G})+Q(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\cdot\overset{*}{G}(0)+S_K P^K(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\geqslant 0$$

对每个$(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\in\overset{*}{\mathscr{D}}$成立，其中$\overset{*}{\mathscr{D}}=\{\overset{*}{F},\overset{*}{G}\mid$对某时$t$，$\overset{*}{F}=F^t$，$\overset{*}{G}=G^t$其中$(F,G)\in\mathscr{D}\}$.

证明　如果(3.6.1)和(3.6.2)被满足，则(3.5.8)肯定不被违背，这表明与热力学相一致．反过来，如任意选择，$(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\in\overset{*}{\mathscr{D}}$，则由于$\overset{*}{\mathscr{D}}$的定义，存在一个过程$(F,G)$和时刻$t_0$使得$F^{t_0}=F,G^{t_0}=G$．根据公理1，在$\mathscr{D}$中存在$(F,G)$的一个$(\Lambda,M,t_0)$局部线性延拓，它在$t\in(t_0,t_0+\tau)$时是线性的．显然

$$F_{\Lambda}^{t_0}=\overset{*}{F},\quad G_{\Lambda}^{t_0}=\overset{*}{G}$$

对每一$t\in(t_0,t_0+\tau)$，

$$\dot{F}_{\Lambda}(t)=\Lambda,\quad \dot{G}(t)=M$$

利用公理2，并使过程(F_Λ,G_Λ)受条件(3.5.8)的限制，可得不等式

(3.6.3)

$$\begin{aligned}&-[D_F\hat{\Sigma}(F_{\Lambda}^t,G_M^t)-T(F_{\Lambda}^t,G_M^t)]\cdot\Lambda\\&\quad-D_G\hat{\Sigma}(F_{\Lambda}^t,G_M^t)\cdot M-R\hat{\Sigma}(F_{\Lambda}^t,G_M^t)\\&\quad+\hat{Q}(F_{\Lambda}^t,G_M^t)\cdot G(t)+D_F\hat{P}^K(F_{\Lambda}^t,G_M^t)F_{,K}\\&\quad+D_G\hat{P}^K(F_{\Lambda}^t,G_M^t)\cdot G_{,K}+S_K\hat{P}^K(F_{\Lambda}^t,G_M^t)\geqslant 0\end{aligned}$$

对每一$t\in(t_0,t_0+\tau)$成立．现设$t\to t_0^+$，则由公理3，且因A和M是任意的而$F_{,K}$和$G_{,K}$在t_0^+可以任选，得到(3.6.1)和(3.6.2)．我们马上注意到，如F和G是梯度（例如$x_{,K}$，$\theta_{,K}$)则只有$D_F\hat{P}^K$和$D_G\hat{P}^K$各量的对称部分为零（例如$D_{\mathbf{x},L}\hat{P}^K+D_{\mathbf{x},K}\hat{P}^L=0$，如取$F=x_{,K}$)．方程$(3.6.1)_{2,3}$当然也必须以这种意义来理解(参见第2章)．

定义(平衡对)　设A和B是某一过程在某时t_0所占据的一对量，即$F(t_0)=A$，$G(t_0)=B$，且设(F_{t_0},G_{t_0})代表(F,G)在t_0的常延拓．数量对(A,B)称为一个平衡对，如在所有$t>t_0$时，

$$\frac{D}{Dt}\hat{\Sigma}(F^t_{t_0},G^t_{t_0}\leqslant 0 \tag{3.6.4}$$

这个定义指的是t_0以后的时间t，那时(F,G)占据(A,B)．于是(F,G)可以是时刻t_0以前任意多个过程，但在t_0以后它们全变为同一个常量(图3.6.1)．设$\mathscr{D}_0$为$\mathscr{D}$的一个子集，它具有以下性质：

(a) 每个$(A,B)\in\mathscr{D}_0$是一平衡对；

(b) $\mathscr{D}_0$是$\mathscr{D}_F\times\mathscr{D}_G'$的一个连通开子集，其中$\mathscr{D}_G'$是$\mathscr{D}_G$的某一子集．这个空间称为容许平衡空间，对所有$(A,B)\in\mathscr{D}_0$的反应函数称为平衡反应函数，例如

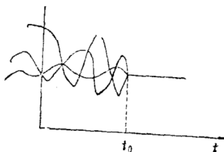


图 3.6.1　在$t>t_0$时变为平衡过程的若干个过程

$$\Sigma(A,B)=\hat{\Sigma}(A^+,B^+), \tag{3.6.5}$$

$$T(A,B)=\hat{T}(A^+,B^+)$$

分别是自由能反应函数和应力反应函数．按照公理6，Σ和$\boldsymbol{P}$在$\mathscr{D}_0$上连续可微．注意，平衡态的概念包括$(A,0)$，例如温度梯度为零的情况．

定理 2 如$(A,B)\in\mathscr{D}_0$，则

$$\Sigma(A,B)=\Sigma(A),\quad T(A,B)=T(A)=\Delta_A\Sigma(A) \tag{3.6.6}$$

且对所有过程$(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\in\overset{*}{\mathscr{D}}$，如果$\left(\overset{*}{F}(0),\overset{*}{G}(0)\right)\in\mathscr{D}_0$，则有

$$\Sigma\left(\overset{*}{F}(0)\right)\leqslant\hat{\Sigma}(\overset{*}{F},\overset{*}{G}) \tag{3.6.7}$$

其中∇_A代表部分梯度．

首先，这定理说明在平衡对(A,B)的自由能和在$(A,0)$的自由能相同，即自由能和温度梯度无关．其次，平衡态的应力由自由能函数确定．最后，在所有终于达到平衡态的过程中，永久保持为常量的那一过程给出最小可能的自由能．

证明　设$(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\in\overset{*}{\mathscr{D}}$，且$\left(\overset{*}{F}(0),\overset{*}{G}(0)\right)\in\overset{*}{\mathscr{D}}_0$．于是存在一过程$(F,G)$和时刻$t_0$使得$F^{t_0}=\overset{*}{F}$，$G^{t_0}=\overset{*}{G}$．设$(F_{t_0},G_{t_0})$为$(F,G)$在$t_0$的常延拓．公理 4 表明$(F_{t_0},G_{t_0})\in\mathscr{D}$，且因为$\left(F(t_0),G(t_0)\right)=\left(\overset{*}{F}(0),\overset{*}{G}(0)\right)$是一平衡对，(3.6.4)成立，即对所有$t\geqslant t_0$，

$$\hat{\Sigma}(F^{t_0}_{t_0},G^{t_0}_{t_0})\geqslant\hat{\Sigma}(F^{t}_{t_0},G^{t}_{t_0})$$

如令$t\to\infty$，利用公理 5，且因$F^{t_0}_{t_0}=F^*$，$G^{t_0}_{t_0}=G^*$，我们得

(3.6.8)

$$\hat{\Sigma}(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\geqslant\Sigma\Big(F(t_0),G(t_0)\Big)=\Sigma\Big(\overset{*}{F}(0),\overset{*}{G}(0)\Big)$$

这和(3.6.7)相同，只是我们还未证实Σ不依赖于$\overset{*}{G}$。

为完成全部证明只需指明如$(A,B)\in\mathscr{D}_0$，有

(3.6.9)

对每个$M\in\mathscr{D}_G{}'$，

$$[D_G\Sigma(\hat{A}^+,B^+)-\varDelta_B(A,B)]\cdot M=0$$

(3.6.10) $$D_F\hat{\Sigma}(A^+,B^+)=\nabla_A\Sigma(A,B)$$

其实，如果(3.6.9)对所有M成立，则与M相乘的括号必须为零. 由此，以及由(3.6.1)，可见Σ与B无关. 连同定理1一起，它给出(3.6.6). 现来证明(3.6.10). 至于(3.6.9)也即

(3.6.11) $$D_G\hat{\Sigma}(A^+,B^+)=\nabla_B\Sigma(A,B)$$

它的证明与此相仿.

为了建立(3.6.10)我们选取$(A,B)\in D_0$和$\varLambda\in\mathscr{D}_F$，且令$(F,G)$在$\mathscr{D}$内是常量函数，其值为$(A,B)$. 再设$(F_\varLambda,G_0)$是$(F,G)$在$\mathscr{D}$内的一个$(\varLambda,0,0)$局部线性延拓，其线性范围为$(0,\tau)$. 将公理1用于常函数$(F,G)$，可得到

(3.6.12) $$R\hat{\Sigma}(F^+,G^+)=0$$

将公理2用于$(F_\varLambda,G_0)$，令对全部t时$G_0'=B^+$，则对全部$t\in(0,\tau)$有

$$\frac{D}{Dt}\hat{\Sigma}(F_A^t, B^+) = D_F\hat{\Sigma}(F_A^t, B^+)\cdot A + R\hat{\Sigma}(F_A^t, B^+)$$

因 $F_A^0 = A^+$，公理 2 和(3.6.1)说明

(3.6.13)

$$D_F\hat{\Sigma}(A^+, B^+)\cdot \Lambda = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{d}{dt}\hat{\Sigma}(F_A^t, B^+)\right]$$

因 $A\in\mathscr{D}_F$ 是任选的，为建立(3.6.10)只要证明下面所定义的△等于零就够了：

(3.6.14)

$$\begin{aligned}\triangle &\equiv \nabla_A\Sigma(A,B)\cdot A - D_F\hat{\Sigma}(A^+, B^+)\cdot A\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\Sigma(A+tA,B)-\Sigma(A,B)}{t}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\hat{\Sigma}(F_A^t,B^+)-\hat{\Sigma}(A^+,B^+)}{t}\right]\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\Sigma(A+tA,B)-\Sigma(F_A^t,B^+)}{t}\right]\end{aligned}$$

令(F_{-A}, G_0)是常函数(F,G)在 $\mathscr{D}$ 内的一$(-A,0,0)$局部线性延拓。因$\mathscr{D}_0$是开的，存在一个$t_0>0$使得对每个$t\in(-t_0, t_0)$有$(A+tA,B)\in\mathscr{D}_0$，且 F_A 和 F_{-A} 在$(0,t_0)$是线性的。在$(-t_0,t_0)$上定义 $\omega(t)$ 为

$$\omega(t)=\begin{cases}\Sigma(A+tA,B)-\hat{\Sigma}(F_A^t,B^+), & 0\leqslant t<t_0\\ \Sigma(A+tA,B)-\hat{\Sigma}(F_{-A}^{-t},B^+), & -t_0<t<0\end{cases}$$

根据公理 2，3 和 6，并由于$F^0_\Lambda = F^0_{-\Lambda} = A^+$，$\omega$ 在$(-t_0, t_0)$ 上连续，并在$(-t_0, 0)$和$(0, t_0)$上连续可微，且

$$\omega(0) = 0 \tag{3.6.15}$$

另外，用推导(3.6.13)相同的方法可得

$$-D_F\hat{\Sigma}(A^+, B^+)\cdot\Lambda = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{d}{dt}\hat{\Sigma}(F^t_\Lambda, B^+)\right]$$

$$= -\lim_{t\to 0^-}\left[\frac{d}{dt}\hat{\Sigma}(F^{-t}_{-\Lambda}, B^+)\right]$$

这结果连同(3.6.15)说明，ω 在 $t=0$ 时从右的导数和从左的导数重合。因此 ω 在$(-t_0, t_0)$上连续可微，但是，

$$F^t_\Lambda(0) = A + t\Lambda, \quad 0 \leqslant t < t_0$$
$$F^{-t}_{-\Lambda}(0) = A + t\Lambda, \quad -t_0 < t < 0$$
$$(A + t\Lambda, B) \in \mathscr{D}_0, \quad -t_0 < t < t_0$$

用(F^t_Λ, B^+)和$(F^{-t}_{-\Lambda}, B^+)$代替(3.6.8)中的$(\overset{*}{F}, \overset{*}{G})$，从而得到：对所有 $t \in (-t_0, t_0)$，$\omega(t) \leqslant 0$。这连同(3.6.15)以及 ω 的光滑性，说明 $\dot{\omega}(0) = 0$。但(3.6.14)的右端等于 $\dot{\omega}(0)$。于是$\triangle = 0$，(3.6.10)的证明完毕。

命题 1　一对$(A, B) \in \mathscr{D}$ 是平衡对当且仅当对每一个具有$\overset{*}{F}(0) = A$，$\overset{*}{G}(0) = B$的$(\overset{*}{F}, \overset{*}{G}) \in \overset{*}{\mathscr{D}}$，有

$$R\hat{\Sigma}(\overset{*}{F}, \overset{*}{G}) \leqslant 0 \tag{3.6.16}$$

证明　由公理 2，在过程(F, G)的任意常延拓$(F_{t_0}$，

G_{t_0})中，对所有 $t>t_0$ 时，

$$(3.6.17)\qquad \frac{D}{Dt}\hat{\Sigma}(F^t_{t_0}, G^t_{t_0}) = R\hat{\Sigma}(F^t_{t_0} G^t_{t_0})$$

这表明，如(3.6.16)成立，则(A,B)是一平衡过程．反之，设(A,B)是一平衡对，并设$(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\in\mathscr{D}$ 且有 $\overset{*}{F}(0)=A$，$\overset{*}{G}(0)=B$．于是存在一过程(F,G)和时刻 t_0 使得 $F^{t_0}=F$，$G^{t_0}=G$．如果(F_{t_0},G_{t_0})是(F,G)在 t_0 的常延拓，则(3.6.4)和(3.6.17)表明在极限 $t\to t_0$ 中(3.6.16)成立．

命题 2 令$(A, B)\in\mathscr{D}$，且设对每个使$\overset{*}{F}(0)=A$，$\overset{*}{G}(0)=B$的$(\overset{*}{F},\overset{*}{G})$等式

$$Q(\overset{*}{F},\overset{*}{G})\cdot B+S_K P^K(\overset{*}{F},\overset{*}{G})=0$$

成立，则(A,B)是一平衡对．

证明直接由定理 1 和命题 1 得到．

定理 3 令 $t_0<t_1$，且(F, G)为具有如下性质的过程：

(a) $F(t), G(t)\in\mathscr{D}$，$-\infty<t\leqslant t_1$，

(b) $\big(F(t), G(t)\big)=(A,B)$，$-\infty<t\leqslant t_0$，

(c) $F(t_1)=A$，

(d) F 在$(-\infty, t_1]$上光滑；

于是有

$$(3.6.18)\qquad \int_{t_0}^{t_1} T(t)\cdot\dot{F}(t)dt\geqslant 0$$

其中

$$T(t)=\hat{T}(F^t,G^t)$$

证明　由定理1，命题1，并用公理1和上述(a)我)们有

$$\int_{t_0}^{t_1}T(t)\cdot\dot{F}(t)dt\geqslant\Sigma(t_1)-\Sigma(t_0)$$

但由假设(b)，

$$\Sigma(t_0)=\hat{\Sigma}(A^+,B^+)=\hat{\Sigma}(A),\quad \Sigma(t_1)=\hat{\Sigma}(F^{t_1},G^{t_1}$$

因而由假设(c)和(3.6.7)得

$$(3.6.19)\qquad \Sigma(t_0)\leqslant\Sigma(t_1)$$

定理证明完毕。

3.7 翁萨格力和通量

热力学状态变量选定后(即选好本构方程中的自变量后)，熵不等式的形式成为

$$(3.7.1)\qquad \sigma(\boldsymbol{X})=\sum_{\alpha}J_\alpha(X_\alpha)(X_\alpha-X_\alpha^0)$$

其中集合$\{X_\alpha\}$和$\{J_\alpha\}$分别称为热力学力和通量。集合$\{X_\alpha^0\}$代表X_α的平衡值，即能使熵产量(*entropy production*)为零

$$(3.7.2)\qquad \sigma(X_\alpha^0)=0$$

的值。例如，在(3.4.7)中出现的力和通量如表1所示。

表1

热力学力($X_\alpha - X_\alpha^0$)	相应的热力学通量
$\dot{\theta}$	$-(\rho_0/\theta)(\partial\hat{\psi}/\partial\theta+\eta)$
$\dot{x}^k$	$-(\rho_0/\theta)\partial\hat{\psi}/\partial x^k$
$\boldsymbol{v}_{,K}$	$(1/\theta)(\hat{\boldsymbol{T}}^K-\rho_0\partial\psi/\partial\boldsymbol{x}_{,K})$
$x^k{}_{,K}$	$\partial\hat{P}^K/\partial x^k$
$x^k{}_{,LK}$	$\partial\hat{P}^K/\partial x^k{}_{,L}$
$\theta_{,K}$	$(\partial\hat{P}^K/\partial\theta)+(1/\theta)^2Q^K$

我们注意到$\{J_\alpha\}$和$\{X_\alpha\}$的选择不是唯一的，但不管作怎样的选择，熵产量总是(3.7.1)的形式，且必须是非负的．再有，象在(3.4.8)中那样，热力量通量中某些可能为零；其结果是，熵不等式中可能不包含相应的项．

在应用翁萨格关于线性非平衡态热力学的理论时，假设热力量通量对热力学力是线性的，即

$$J_\alpha=\sum_\beta L_{\alpha\beta}(X_\beta-X_\beta^0) \tag{3.7.3}$$

其中表象的常系数$L_{\alpha\beta}$满足称为翁萨格互逆关系的对称性关系式：

$$L_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha} \tag{3.7.4}$$

当(3.7.3)代入(3.7.1)后，得一个二次型

(3.7.5) $$\sigma=\sum_{\alpha,\beta}L_{\alpha\beta}(X_\alpha-X_\alpha^0)(X_\beta-X_\beta^0)$$

因此，要热力学第二定律被满足，必须附加一条件，即$\{L_{\alpha\beta}\}$是一个非负二次型的系数矩阵.

翁萨格理论在化学物理中找到广泛的用处，尽管这理论的反对者提出重要的不赞成意见〔参见 Truesdell (1969，附录II)〕.主要的反对意见可归纳如下：(1) 这理论是线性的；(2) 力和通量的选择不唯一，而是任意的；(3) 互逆关系缺乏确切的证明. 虽然有些统计力学的方法证实了互逆关系的用处(参见 Groot，1952 第二章)，但总体说来，这个课题最好也不过仍是有争议的.

最近，Edenlen (1972) 扬弃了反对意见(1)和(2)，从而提供了非线性过程的一个数学理论. 这理论还处于发展阶段，但我们相信，迄今所得结果是重要的，且有些前途，因而下面对这理论作一简介.

作变量变换后(3.7.1)可写为

(3.7.6) $$\sigma=\sum_{\alpha}J_\alpha(\boldsymbol{X})X_\alpha$$

其中$\{J_\alpha\}$经过重新定义，取原先的 X_α 作为 X_α^0. 如采用互逆关系

(3.7.7) $$J_\alpha=\sum_{\beta}L_{\alpha\beta}X_\beta$$

则我们求得

(3.7.8) $$\partial J_\alpha/\partial X_\beta=L_{\alpha k}=\partial J_\beta/\partial X_\alpha$$

另外，当 $X_\alpha=0$ 时从(3.3.7)可见

(3.7.9) $$J_\alpha\Big|_{\boldsymbol{X}=0}=0$$

因为 σ 在伽利略变换下形式不变，我们必须还要求 $\sum_\alpha J_\alpha X_\alpha$ 在伽利略变换下形式不变. 这些考虑促使作出以下一些定义.

定义 1 由 M 个热力学力 $X_1,\cdots,X_M$ 和 p 个状态参量 $W_1,\cdots,W_p$ 的 M 个函数组成

(3.7.10)

$$J_\alpha=J_\alpha(W_1\cdots,W_p;X_1\cdots,X_M),\quad \alpha=1,2,\cdots,M$$

的集合称为构成热力学通量的一个昂萨格集合，当且仅当

(3.7.11)

$$\partial J_\alpha/\partial X_\beta=\partial J_\beta/\partial X_\alpha,\quad \beta=1,2,\cdots,M$$

对所有 $(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 成立；

(3.7.12) $$J_\alpha(W_1,\cdots,W_p;0,\cdots,0)=0$$

对所有 $\{\boldsymbol{W}\}$ 成立；$\sigma=\sum_{\alpha=1}^M J_\alpha X_\alpha$ 在伽利略变换下形式不变；以及

(3.7.13) $$\sum_{\alpha=1}^M J_\alpha X_\alpha\geqslant 0$$

对所有 $(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 成立.

显然当 J_α 对 X_α 为线性时，以上这些都成立，如同在前面翁萨格理论中所看到的那样. 但对于非线性理论，它们导致

新的结果．

条件(3.7.11)正好是存在一个通量势ϕ的必要且充分的条件，这个ϕ是$p+M$个变量$(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$的函数，从而

$$(3.7.14) \qquad J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha$$

于是条件(3.7.15)给出

$$(3.7.15) \qquad \partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha\Big|_{\boldsymbol{X}=0}=0.$$

再将(3.7.14)代入σ的表达式，必须有

$$(3.7.16) \qquad \sigma=\sum_{\alpha=1}^{M}X_\alpha\partial\phi/\partial X_\alpha\geqslant 0$$

于是要$\{\partial\phi/\partial X_\alpha\}$成为一个翁萨格集合，$\phi$必须满足(3.7.15)，(3.7.16)；而$\sigma$必须在伽利略变换下形式不变．如果$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$能满足(3.7.16)，则存在一个函数$g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$使得

$$(3.7.17) \qquad g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\geqslant 0,\quad g(W;0)=0$$

以及

$$(3.7.18) \qquad \sum_\alpha X_\alpha\partial\phi/\partial X_\alpha=g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$$

对所有$(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$成立．于是$\sigma=g$，因而简化的熵产量将唯一地由已知$p$个参量$W_1,\cdots,W_p$和$M$个热力学力$X_1,\cdots,X_M$所确定．注意这个结果所要求的只是函数$g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$存在，并不需要真实知道这个函数．为决定通量函数$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$，在条件(3.7.15)下积分(3.7.18)式．(3.7.18)的通解是

$$(3.7.19) \qquad \phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\phi_0(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})+\int_0^1 g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})\frac{d\tau}{\tau}$$

其中 $\phi_0(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 是齐次方程

(3.7.20)
$$\sum_{\alpha=1}^{M} X_\alpha \partial\phi/\partial X_\alpha = 0$$

的通解．因而 $\phi_0(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 是 X_α 的零次齐次函数，即

$$\phi_0(\boldsymbol{W};\lambda X_1,\cdots,\lambda X_M) = \phi_0(\boldsymbol{W};X_1,\cdots,X_M)$$

此外 ϕ 必须满足(3.7.15)．由此可得

$$\phi_0(\boldsymbol{W};0,\cdots,0) = \phi_0(\boldsymbol{W};X_1,\cdots,X_M)$$

因而 ϕ_0 不依赖于 X_α．方程(3.7.19)现成为

(3.7.21)
$$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}) = \phi_0(\boldsymbol{W}) + \int_0^1 g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})\frac{d\tau}{\tau}$$

上式微分后得

(3.7.22)
$$\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha} = \int_0^1 \frac{\partial g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial(\tau X_\alpha)}d\tau$$

所以

(3.7.23)
$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha}\right|_{\boldsymbol{X}=0} = \int_0^1 \left.\frac{\partial g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{Y})}{\partial Y_\alpha}\right|_{\boldsymbol{Y}=0} d\tau$$
$$= \left.\frac{\partial g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{Y})}{\partial Y_\alpha}\right|_{\boldsymbol{Y}=0}$$

因为 $g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 满足(3.7.17)，$g(\boldsymbol{W};0)$ 是 $g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 的一个极小值，即

(3.7.24) $\partial g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha\Big|_{\boldsymbol{X}=0}=0$

所以，(3.7.23)证明了(3.7.21)满足条件(3.7.15)．于是我们建立了以下的定理(*Edelen*，1972)：

定理1 M个函数$J_\alpha=J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$的集合是一翁萨格集合当且仅当

(3.7.25) $J_\alpha=\partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha$

其中通量势$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$由

(3.7.26)

$$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\phi_0(\boldsymbol{W})+\int_0^1 g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\frac{d\tau}{\tau}$$

对某个函数$g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$给出，$g$具有如下性质：

(3.7.27) $g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\geqslant 0,\quad g(\boldsymbol{W};0)=0$

在这些条件下，我们有

(3.7.28) $\sigma=\sum_{\alpha=1}^{M}J_\alpha X_\alpha=g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\geqslant 0$

于是，已知满足(3.7.27)的任意函数$g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$，就决定了$\phi$和$J_\alpha$，且满足热力学第二定律．

$g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$的一个最简单例子是正定二次型

(3.7.29)

$$g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\sum_{\alpha,\beta}L_{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta,\quad L_{\alpha\beta}=L_{\beta\alpha}$$

以此代入(3.7.26)和(3.7.25)，得

$$
(3.7.30) \quad \begin{cases} \phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}) = \phi(\boldsymbol{W}) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta \\ J_\alpha = \sum_{\beta=1}^{M} L_{\alpha\beta} X_\beta \end{cases}
$$

可见翁萨格理论是选取（3.7.29）形式的 $g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 而形成的一个特殊情况.

表面看来，为了决定一个有所希望性质的 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$，需要知道 $g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$的形式. 其实这是不必要的，函数 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 所希望的性质能用其他方法得到保证. 这根据对函数 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 的一个凸性条件. 这个条件同时给出耗散函数 σ 的一个上界，我们在下面的定理中给出这些结果.

定理 2（*Edelen*） 设 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 满足条件

(3.7.31)

$$
\phi[\boldsymbol{W};\lambda\boldsymbol{X} + (1-\lambda)\boldsymbol{Y}] \leqslant \lambda\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}) + (1-\lambda)\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{Y})
$$

$$
(3.7.32) \qquad \partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha \big|_{\boldsymbol{X}=0} = 0
$$

则 $J_\alpha = \partial\phi/\partial X_\alpha$具有性质

(3.7.33)

$$
0 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{M} J_\alpha X_\alpha \leqslant \phi(\boldsymbol{W};2\boldsymbol{X}) - \phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})
$$

所以，对 $\boldsymbol{X}$ 为凸且其极小值在 $\boldsymbol{X}=0$ 的 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$，不必假设 $g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$，它可由

$$
(3.7.34) \qquad g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}) = \sum_{\alpha=1}^{M} X_\alpha \partial\phi/\partial X_\alpha
$$

决定．对于凸函数 ϕ，在所有 $\boldsymbol{X}$ 处 $\partial^2\phi/\partial X_\alpha\partial X_\beta\geqslant 0$，我们另有一个通量泛函的集合．显然还可得出其他的集合，只要对当作 $\|\boldsymbol{X}\|$ 函数的 $\partial^2\phi/\partial X_\alpha\partial X_\beta$ 的最小特征值安置上合适的生长条件即得．现证明上述定理．由凸性(3.7.31)我们有

$$\begin{aligned}&\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}+\lambda\boldsymbol{Y}]\\&=\phi[\boldsymbol{W};\lambda(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})+(1-\lambda)\boldsymbol{X}]\leqslant\lambda\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}]\\&\quad+(1-\lambda)\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}]\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}&\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}+\lambda\boldsymbol{Y}]-\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}]\leqslant\lambda(\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}\\&\quad+\boldsymbol{Y}]-\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}])\end{aligned}$$

令 $\lambda\to 0$ 得

(3.7.35)

$$Y_\alpha\partial\phi/\partial X_\alpha\leqslant\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}]-\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}]$$

如设 $\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，得

(3.7.36)

$$-X_\alpha\partial\phi/\partial X_\alpha\leqslant\phi[\boldsymbol{W};0]-\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}]$$

(3.7.37)

$$X_\alpha\partial\phi/\partial X_\alpha\leqslant\phi[\boldsymbol{W};2\boldsymbol{X}]-\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}]$$

因 $\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}]$ 是凸的，$\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}]-\phi[\boldsymbol{W};0]\geqslant 0$．于是，写 $J_\alpha=\partial\phi/\partial X_\alpha$，即得(3.7.33)，定理得证①．有意思的是，这个

① 原注　Edelen(1972) 对泛函 $\phi[\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}]$ 证明了这样的定理．在泛函的情况中(3.7.34)用 ϕ 对于 $\{X_\alpha\}$ 的泛函导数代替．

定理还对耗散函数σ提供一个上界．这个上界其实是一个上确界．

上述建议肯定会消除对线性本构理论的反对意见(1)．反对意见(2)是关于翁萨格通量的非唯一性，这由下述定理来消除．

定理 3 如果$\sigma=\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$是一个真实物质体的熵产量函数，使有

(3.7.38) $$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\geqslant 0,\quad \sigma(\boldsymbol{W};0)=0$$

则有一个且仅有一个热力学通量的翁萨格集合$\{J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\}$使得

(3.7.39) $$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\sum_{\alpha=1}^{M}J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})X_\alpha$$

这些翁萨格通量由以下的关系式用$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$表达出来：

(3.7.40)

$$J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\int_0^1[\partial\sigma(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})/\partial(\tau X_\alpha)]d\tau$$

证明 设$\{J_\alpha\}$是一翁萨格集合，则(3.7.14)，(3.7.21)，(3.7.27)和$(3.7.28)_1$必须成立．因为$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$必须满足(3.7.28)，(3.7.28)给出$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$，其中$g$满足(3.7.19)．于是(3.7.21)给出

(3.7.41)

$$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\phi_0(\boldsymbol{W})+\int_0^1\sigma(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})\frac{d\tau}{\tau}$$

因而(3.7.14)给出

(3.7.42)

$$J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}) = \partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha$$
$$= \int_0^1 [\partial\sigma(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})/\partial(\tau X_\alpha)] d\tau$$

定理证毕.

注意在这证明中重要的是互逆关系 (3.7.11)①. 这种关系是作为公设而成立的.因而反对意见 (3) 仍然有效,还需要把它建立在其他的根据上,或者用其他更明显的公理代替它.

通量势 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 具有一些有趣的性质, 它们可由(3.7.21)推导出. (3.7.21)的偏导数给出

(3.7.43)

$$J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}) = \frac{\partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial X_\alpha} = \int_0^1 \frac{\partial g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})}{\partial(\tau X_\alpha)} d\tau$$

$$\frac{\partial^r J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial X_{\alpha 1}\cdots\partial X_{\alpha r}} = \frac{\partial^{r+1}\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial X_\alpha \partial X_{\alpha 1}\cdots\partial X_{\alpha r}}$$
$$= \int_0^1 \tau^r \frac{\partial^{r+1} g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})}{\partial(\tau X_\alpha)\partial(\tau X_{\alpha 1})\cdots\partial(\tau X_{\alpha r})} d\tau$$

引进如下的线性微分算子 $\mathscr{D}$:

(3.7.44) $$\mathscr{D} \equiv \sum_{\alpha=1}^{M} X_\alpha \partial/\partial X_\alpha$$

求得

---

① 原注 例如, 在线性昂萨格理论中 $\sigma = \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$, 因而 $\sigma = \sum_\alpha J_\alpha X_\alpha$ 给出 $J_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta} X_\beta$,如果我们要求满足互逆关系 $\partial J_\alpha/\partial X_\beta = \partial J_\beta/\partial X_\alpha$ 的话. 没有这个互逆关系我们就会得到 $J_\alpha = (L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}) X_\beta$, 其中 $S_{\alpha\beta}$ 是一个任意的反对称矩阵, 即 $S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}$.

(3.7.45)

$$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\sum_{\alpha=1}^{M}X_\alpha J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{M}X_\alpha\frac{\partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial X_\alpha}=\mathscr{D}\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$$

$$\mathscr{D}\phi=\int_0^1\mathscr{D}g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})d\tau/\tau$$

$$=\int_0^1\sum_{\alpha=1}^{M}X_\alpha[\partial g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})/\partial(\tau X_\alpha)]d\tau$$

$$=\int_0^1[\partial g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})/\partial\tau]d_\tau$$

$$=g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})-g(\boldsymbol{W};0)$$

因为$g(\boldsymbol{W};0)=0$，故有

(3.7.46) $$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=g(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$$

现来计算$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\Sigma_{\alpha=1}^{M}J_\alpha X_\alpha$的逐次导数，并利用互逆关系(3.7.11)．利用(3.7.45)和(3.7.46)我们得

(3.7.47)

$$\frac{\partial^{r+1}\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial X_\alpha\partial X_{\alpha1}\cdots\partial X_{\alpha r}}=(r+1+\mathscr{D})\frac{\partial^r J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial X_{\alpha1}\cdots\partial X_{\alpha r}}$$

$$=(r+1+\mathscr{D})\int_0^1\tau^r\frac{\partial^{r+1}\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial(\tau X_\alpha)\partial(\tau X_{\alpha1})\cdots\partial(\tau X_{\alpha r})}d\tau$$

在$\boldsymbol{X}=0$，$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$达到它的极小值$\sigma(\boldsymbol{W};0)=0$，且$\xi_{\boldsymbol{X}=0}=0$如果$\xi$在$\boldsymbol{X}=0$处有有界的一阶导数①．于是由(3.7.47)

见到

(3.7.48)

$$\left.\frac{\partial^{r+1}\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial X_{\alpha}\partial X_{\alpha1}\cdots\partial X_{\alpha r}}\right|\boldsymbol{X}=0=(r+1)\frac{\partial^{r}J_{\alpha}(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})}{\partial X_{\alpha1}\cdots\partial X_{\alpha r}},\boldsymbol{X}=0$$

因为 $J_{\alpha}=\partial\phi/\partial X_{\alpha}$，(3.7.48)表明 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$和 $\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 在 $\boldsymbol{X}=0$ 处具有完全相同的非零导数.另外，$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 在 $\boldsymbol{X}=0$ 处具有同阶的极小量。因为

(3.7.49)

$$\phi(\boldsymbol{W};0)=\phi_{0}(\boldsymbol{W})+\int_{0}^{1}\sigma(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})\Big|_{\boldsymbol{X}=0}\frac{d\tau}{\tau}=\phi_{0}(\boldsymbol{W})$$

我们见到

$$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})>\phi_{0}(\boldsymbol{W})=\phi(\boldsymbol{W};0)$$

又因 $g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 且

$$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})-\phi_{0}(\boldsymbol{W})=\int_{0}^{1}g(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})d\tau/\tau$$

对于固定的 $\boldsymbol{W}$，$\phi(\boldsymbol{W};0)$是$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$的一个绝对极小值. 于是在没有约束时，热力学平衡状态$\boldsymbol{X}=0$［亦即 $\sigma(\boldsymbol{W};0)=0$］可以由极小值原理

(3.7.50) $$\min_{x}\ \phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\phi(\boldsymbol{W};0)$$

得到. 这构成了对线性翁萨格理论作出的变分原理的基础［参见 *Gyarmati* (1970)］. 在线性翁萨格理论中 $\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$具有二次曲面的均匀性质. 这里展开的非线性理论容许有振荡因而容易在 $\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\geqslant 0$的值中存在着临界点，而在线性理

① 译注 原文未说明 ξ 的意义，可能指 ϕ。

论中则没有．在这种临界点$\overline{\boldsymbol{X}}$处可能有 $\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=0$．因而在这些临界点处可能出现平衡态也可出现可逆性，而该处的通量 $J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$可以是零也可以不是零．通量势 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$有个有用的性质，即它排除了这些临界点．事实上，如考虑$\boldsymbol{X}$作为M维空间 $\mathscr{E}_M$ 中的一个矢量，则可以写成

$$(3.7.51)\qquad \sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\cdot\nabla_{\mathbf{X}}\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$$

因 $\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 且$\overline{\boldsymbol{X}}\cdot\nabla_{\mathbf{X}}$与 $\mathscr{E}_M$ 中径向导数成正比，通量势 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 沿 $\mathscr{E}_M$ 中径向射线是一个非递减函数．另外，(3.7.51)说明，ϕ 的径向导数只在使 $\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=0$ 的那些$\boldsymbol{X}$处等于零．$\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$在每一个使 $\sigma(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X};)\neq 0$ 的$\boldsymbol{X}$处至少有一个非零的偏导数．利用(3.7.43)和(3.7.46)后得

$$(3.7.52)\qquad J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha$$

$$=\int_0^1[\partial\sigma(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})/\partial(\tau X_\alpha)]d\tau$$

可以利用简单的例子表明，一般说来，当 $\sigma(W;\overline{X})=0$且$\overline{X}\neq 0$ 时 $J_\alpha(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})\neq 0$．如果 $J_\alpha(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})$在$\overline{\boldsymbol{X}}\neq 0$ 等于零且 $\sigma(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})=0$,则$\overline{\boldsymbol{X}}$ 是一个平衡点．如果它不是，我们仍然有

$$\sigma(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})=\sum_\alpha\overline{X}_\alpha J_\alpha(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})=\sum_\alpha\overline{X}_\alpha\partial\phi(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})/\partial\overline{X}_\alpha,$$

因此连同 $J_\alpha(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})\neq 0$ 这表明所有能使

$$(3.7.53)\qquad \sum_{\alpha=1}^{M}\overline{X}_\alpha\partial\phi(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})/\partial X_\alpha=0$$

的那些点$\overline{\boldsymbol{X}}$组成所有可逆点和热平衡点的集合，而平衡点由

$$(3.7.54)\qquad \partial\phi(\boldsymbol{W};\overline{\boldsymbol{X}})/\partial\overline{X}_\alpha=0$$

给出。

3.8 翁萨格力势　变分原理

翁萨格通量 $J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 的定义是

$$(3.8.1)\qquad J_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha$$

设以

$$(3.8.2)\qquad \partial J_\alpha/\partial X_\beta=\partial^2\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial X_\alpha\partial X_\beta$$

为元素的矩阵在某些点$\boldsymbol{X}$处为非奇异的，那么我们可以（在原则上可以）解出$\boldsymbol{X}$，以$(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})$表达出。由(3.7.40)我们有

(3.8.3)

$$\partial J_\alpha/\partial X_\beta=\int_0^1[\partial^2\sigma(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})/\partial(\tau X_\alpha)\partial(\tau X_\beta)]\tau d\tau$$

于是，要(3.8.1)的解

$$(3.8.4)\qquad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})$$

存在的一个充分条件是对所有 $\boldsymbol{Y}\neq0$

(3.8.5)

$$0<\sum_{\alpha,\beta}Y_\alpha Y_\beta\frac{\partial J_\alpha}{\partial X_\beta}=\int_0^1\frac{\partial^2\sigma(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{X})}{\partial(\tau X_\alpha)\partial(\tau X_\beta)}(\tau Y_\alpha)(\tau Y_\beta)\frac{d\tau}{\tau}$$

我们知道 $\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 在 $\boldsymbol{X}=0$ 处有一绝对极小值。于是在 $\boldsymbol{X}=0$ 的某一邻域 $\mathscr{N}$ 中 $\det(\partial J_\alpha/\partial X_\beta)\neq0$。在 $\mathscr{N}$ 中用勒让

德变换引进力势 $\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})$：

(3.8.6)

$$\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})=\sum_{\alpha=1}^{M}J_\alpha X_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})-\phi\Big(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X}(\boldsymbol{W};J)\Big)$$

因为 $\mathscr{N}$ 是一个正则区域. 利用这变换后，有

(3.8.7) $$X_\alpha(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})=\partial\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})/\partial J_\alpha$$

(3.8.8)

$$\partial\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})/\partial W_\alpha=-\partial\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})/\partial W_\alpha$$

由(3.8.4)得关于力的互逆关系

(3.8.9) $$\partial X_\alpha/\partial J_\beta=\partial X_\beta/\partial J_\alpha$$

对于熵产量我们有

(3.8.10) $$\sigma=\sum_\alpha J_\alpha\partial\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})/\partial J_\alpha\geqslant 0$$

可见 $\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})$是 J_α 的一个非递减函数. 对(3.8.10)积分，得

(3.8.11)

$$\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})=\psi_0(\boldsymbol{W})+\int_0^1\sigma(\boldsymbol{W};\tau\boldsymbol{J})\frac{d\tau}{\tau}$$

所以 $\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})$具有类似于 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$的结构. 对于 $\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})$ 所作的关于平衡态的那些结果对于 $\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})$同样成立.

现在引进**耗散势** $D(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X};\boldsymbol{J})$，它是

(3.8.12) $$D(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X};\boldsymbol{J})=\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})+\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})$$

用这个函数可以构造一分变分原理．如令

(3.8.13)

$$K(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X};\boldsymbol{J})=\sum_{\alpha=1}^{M}J_\alpha X_\alpha-\phi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})-\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})$$

并求得

(3.8.14)

$$\frac{dK}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{M}\left(X_\alpha-\frac{\partial\psi}{\partial J_\alpha}\right)\dot{J}_\alpha+\left(J_\alpha-\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha}\right)\dot{X}_\alpha$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{\partial\phi}{\partial W_\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial W_\alpha}\right)\dot{W}_\alpha,$$

利用(3.8.1)，(3.8.7)和(3.8.8)得到

(3.8.15) $$dK/dt=0$$

反之，如(3.8.1)成立，则(3.8.14)意味着(3.8.7)，而如(3.8.7)成立，它意味着(3.8.1)．所以得到结论，即对任意$\boldsymbol{W}(t)$，$K(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X};\boldsymbol{J})$是运动的一个常量，凡是

(3.8.16) $X_\alpha=\partial\psi/\partial J_\alpha$， $J_\alpha=\partial\phi/\partial X_\alpha$

成立时．如 $dK/dt=0$ 且(3.8.16)中任一个成立，则另一个也是正确的．把 d/dt 换成“变分算子 δ”，我们有 $\delta K=0$．于是(3.8.12)和(3.8.13)给出**变分原理**：

(3.8.17) $$\delta(\sigma-D)=0$$

如写成显式，则有

(3.8.18)

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\left[\left(J_\alpha-\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha}\right)\delta X_\alpha+\left(X_\alpha-\frac{\partial\psi}{\partial J_\alpha}\right)\delta J_\alpha\right]=0$$

它表明(3.8.16)中任一式意味着另一式.

如系统中有某些约束，例如，力约束

$$f_r(\boldsymbol{X})=0,\quad r=1,\cdots,c \tag{3.8.19}$$

引进拉格朗日乘子 λ_r,得

$$\delta\left(\sigma-D-\sum_{r=1}^{c}\lambda_r f_r\right)=0 \tag{3.8.20}$$

展开得

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\left\{\left[\left(J_\alpha-\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha}\right)-\sum_{r=1}^{c}\lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial X_\alpha}\right]\delta X_\alpha\right.$$

$$\left.+\left(X_\alpha-\frac{\partial\psi}{\partial J_\alpha}\right)\delta J_\alpha+\sum_{r=1}^{c}f_r\delta\lambda_r\right\}=0$$

这给出

$$J_\alpha=(\partial\phi/\partial X_\alpha)+\sum_{r=1}^{c}\lambda_r\partial f_r/\partial X_\alpha, \tag{3.8.21}$$

$$X_\alpha=\partial\psi/\partial J_\alpha,\quad f_r(\boldsymbol{X})=0$$

为得到乘子 λ_r，以 $(3.8.21)_2$ 代入 $(3.8.21)_3$，再用 $(3.8.21)_1$ 代入这表达式，即

(3.8.22)

$$f_r\left(\frac{\partial\psi(\boldsymbol{W};\boldsymbol{J})}{\partial J_\sigma}J_\sigma=(\partial\phi/\partial X_\alpha)+\Sigma_{r=1}^{o}\lambda_r\partial f_r/\partial X_\alpha\right)=0$$

利用(3.8.21)所给的J_α，写出

$$\overline{\sigma}(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\sum_{\alpha=1}^{M}\left((\partial\phi/\partial X_\alpha)+\sum_{r=1}^{o}\lambda_r\partial f_r/\partial X_\alpha\right)X_\alpha$$

因为$\sigma=\Sigma_{\alpha=1}^{M}X_\alpha\partial\phi/\partial X_\alpha$，我们见到，由于约束熵产量的变化为

(3.8.23)

$$\sigma(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})-\overline{\sigma}(\boldsymbol{W};\boldsymbol{X})=\sum_{r=1}^{o}\lambda_r X_\alpha\partial f_r/\partial X_\alpha$$

注意(3.8.21)$_1$仍然表明互逆关系．对通量的形式为$h_r(\boldsymbol{J})$的约束，以及一般情况下的$P_r(\boldsymbol{X};\boldsymbol{J})=0$都可用相类似的方式处理．Edelen 在较晚的著作（1973）中把他的理论应用于研究渐近稳定性和(化学)反应动力学．

参 考 文 献

DeGroot, S. R. (1952). "Thermodynamics of Irreversible Processes." North Holland Publ., Amsterdam.

Edelen, D. G. B. (1972). A Nonlinear Onsager Theory of Irreversibility, *Int. J. Eng. Sci.* **10**, 481,

Edelen, D. G. B. (1972). Generalized onsager fluxes and forces: A nonlinear phenomenological theory (private communication).

Edelen, D. G. B. (1973). Asymptotic Stability, Onsager Fluxes and Reaction Kinetics, *Int. J. Eng. Sci.* **11**. 819.

Eringen, A. C. (1962). "Nonlinear Theory of Continuous Media." McGraw-Hill, New York.

Eringen, A. C. (1965). A unified theory of thermomechanical materials, ONR Rep., 1965; *Int. J. Eng. Sci.* **4**, 179 (1966).

Eringen, A. C. (1967). "Mechanics of Continua." Wiley, New York.

Eringen, A. C. (1972a). Nonlocal polar elastic continua, *Int. J. Eng. Sci.* **10**, 1.

Eringen, A. C. (1972b). On nonlocal fluid mechanics, *Int. J. Eng. Sci.* **10**, 561.

Eringen, A. C. (1972c). Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of phase waves, *Int. J. Eng. Sci.* **10**, 425.

Eringen, A. C., and Edelen, D. G. B. (1972). On nonlocal elasticity, *Int. J. Eng. Sci.* **10**, 233.

Eringen, A. C., and Suhubi, E. S. (1973). Temperature-rate dependent viscous fluids, *Lett. Appl. Eng. Sci.*

Eringen, A. C., and Ingram, J. (1965). A continuum theory of chemically reacting media—I & II, *Int. J. Eng. Sci.* **3**, 197–212.

Fosdick, R. L. (1966). "Remarks on Compatibility, Modern Developments in the Mechanics of Continua" (S. Eskinazi, ed.), p. 109. Academic Press, New York.

Freudenthal, A. M. (1966). "Introduction to the Mechanics of Solids." Wiley, New York.

Green, A. E., and Lindsay, K. A. (1972). Thermoelasticity, *J. Elasticity*, **2**, 1.

Gurtin, M. E. (1968). On the thermodynamics of materials with memory, *Arch. Rational Mech. Anal.* **28**, 40.

Gyarmati, I. (1970). "Non-Equilibrium Thermodynamics," p. 95. North Holland Publ., Amsterdam.

Lamb, H. (1945). "Hydrodynamics," 6th Ed., Dover, New York.

Müller, I. (1967). On the entropy inequality, *Arch. Rational Mech. Anal.* **26**, 118.

Müller I. (1971). Die Kältefunktion, eine universelle Funktion in der Thermodynamick Viskoser Wärmeleiter Flüssigkeiten, *Arch. Rational Mech. Anal.* **4**, 1.

Noll, W. (1955). On the continuity of the solid and fluid states, *J. Rational Mech. Anal.* **4**, 13.

Novozhilov, V. V. (1948). "Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity" (English translation). Graylock Press, Rochester, New York.

Truesdell, C. (1969). "Rational Thermodynamics." McGraw-Hill, New York.

Truesdell, C., and Noll, W. (1965): The non-linear field theories of mechanics, "Handbuch der Physik," Vol. III/3. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Truesdell, C., and Toupin, R. (1960). The classical field theories, "Handbuch der Physik", Vol. III/1. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Widder, D. V. (1947). "Advanced Calculus." Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.